"Allgemeine Mathematik"
als Bildungskonzept für die Schule

Rudolf Wille

Preprint-Nr. 1687 Oktober 1994

"Allgemeine Mathematik" als Bildungskonzept für die Schule

Rudolf Wille
Fachbereich Mathematik
Technische Hochschule Darmstadt

Inhalt

1 Fehlende Sinnbezüge im Mathematikunterricht

Bei den Vorarbeiten zu diesem Beitrag habe ich ein aufregendes Buch gelesen, dessen Lektüre ich jedem Mathematiklehrenden wärmstens empfehlen möchte: Es ist das Buch von Stella Baruk *"Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik?"* Stella Baruk beginnt ihr Buch mit einer äußerst scharfen Kritik am Mathematikunterricht in Frankreich: Sie hält derzeit einen humanen Unterricht für unmöglich

> "angesichts der im Mathenmatikunterricht grassierenden allgegenwärtigen Gewalt, die Schulbücher und Schulhefte füllt und aus ihnen quillt, die sich in Weiß auf Wandtafeln ausbreitet und die sich in Rot über Klassenarbeiten hermacht: angesichts jener Gewalt, aus der die Urteile gemacht sind, die man über Hunderttausende von Kindern verhängt: über Kinder, die absolut fähig sind, Mathematik zu betreiben, und die absolut zu Unrecht bezichtigt werden, nicht dazu imstande zu sein; angesichts jener Gewalt, deren Auswirkungen ein Leben lang zu spüren sind, in einem Leben, das belastet wird von der Hypothek, daß man in Mathematik ein Versager ist, bei Persönlichkeiten, die geprägt, ja verstümmelt sind durch ein Versagen, das nicht das ihre ist." [Ba89; S. 11]

Diese Kritik trifft sicherlich spezifisch das französische Unterrichtssystem, in dem Mathematik eine besondere Auslesefunktion hat. Doch kann uns Baruks Kritik nicht unberührt lassen, da viele ihrer Beschreibungen und Urteile (mindestens) teilweise auch auf unseren Unterricht zutreffen. Ihr zentraler Vorwurf ist:

> "Der Mathematikunterricht kümmert sich nicht um den Sinn, weil er nicht weiß, wo der Sinn steckt und wovon man ausgehen muß, wenn man ihn herausarbeiten will; weil er nicht weiß, daß Denken in Mathematik zunächst bedeutet, diesem Denken im gewöhnlichen Denken einen Ausdruck zu verschaffen; weil er nicht weiß, daß das Denken die Sprache konstituiert und von ihr konstituiert wird, und daß die Sprache selbst aus zwei Sprachen besteht, der Muttersprache und der Hochsprache." [Ba89; S. 218]

Um Verstehen und Sinn herzustellen, muß das Denken nach Stella Baruk zwischen den drei Sprachen, der Muttersprache des Schülers, der Hochsprache des Lehrers und der Wissenssprache der Mathematik zirkulieren. Ein einseitiges Verlagern des Denkens in die Mathematiksprache kann das Verstehen des Schülers auf Dauer blockieren und Mathematik zu etwas Sinnlosem werden lassen. Welches Ausmaß diese Sinnlosigkeit vielfach hat, demonstriert Stella Baruk an dem Ergebnis eines Versuchs mit Kindern der zweiten und dritten Klasse: Den Kindern wurde folgende Frage vorgelegt: "Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?" Von den 97 befragten Schülern haben 76 für ihre Antwort die angegebenen Zahlen in irgendeiner Weise miteinander kombiniert. Auch von älteren Schülern, ja sogar von Mathematiklehrern wurde bei entsprechenden Fragen die Sinnlosigkeit zu einem erschreckend hohen Prozentsatz nicht erkannt. Es wäre sicherlich zu einfach, das negative Ergebnis der Versuche mit Dummheit zu erklären. Vielmehr weisen diese Versuche wie unzählige andere Erfahrungen daraufhin, daß der Mathematikunterricht bei vielen Menschen die Erwartung verstellt, Mathematik habe etwas mit ihren eigenen Lebens- und Sinnvorstellungen zu tun.

2 Zur Restrukturierung von Mathematik

Das Buch von Stella Baruk hat mich wohl deshalb besonders angesprochen, weil aus der Frage nach Sinn und Bedeutung von Mathematik unsere Vorstellung einer *"Allgemeinen Mathematik"* gewachsen ist, bei der die Verankerung von Sinn durch eine gemeinsprachliche Verbindung mit unserer Lebenswelt eine der wichtigsten Komponenten ist. Um besser verständlich machen zu können, was mit *"Allgemeiner Mathematik"* gemeint ist, soll kurz berichtet werden, wie wir zu diesem Konzept gekommen sind (vgl. [Wi88]): Die Beunruhigung über die fortschreitende Spezialisierung und Instrumentalisierung der Wissenschaften, durch die Fragen nach Sinn, Bedeutung und Zusammenhang zurückgedrängt werden, führte vor fast 15 Jahren Professoren, Mitarbeiter und Studenten des Fachbereichs Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt in einer *"Arbeitsgemeinschaft Mathematisierung"* zusammen. Gemeinsam haben wir nach methodischen Wegen gesucht, Bedingungen für die Anwendbarkeit von Mathematik zu bestimmen und Bedeutungsfragen für mathematische Theorien zu klären. Neben verschiedenen philosophischen Ansätzen hat uns dabei vor allem der Entwurf einer *"Wissenschaftsdidaktik"* von Hartmut von Hentig beeinflußt. Beschrieben hat Hentig seine Vorstellungen von Wissenschaftsdidaktik am weitgehendsten in seinem Buch *"Magier oder Magister? Über die Einheit der Wissenschaft im Verständigungsprozeß"* [He74], in dem er in großer Breite die gegenwärtigen Wissenschaftsprobleme diskutiert und Vorschläge zu deren Überwindung macht. Der fortschreitenden Spezialisierung setzt Hentig die Forderung nach *"Restrukturierung der Wissenschaften"* entgegen. Was er darunter versteht, beschreibt er wie folgt: Die Wissenschaften müssen

> "ihre Disziplinarität überprüfen, und das heißt, ihre unbewußten Zwecke deklarieren, ihre Mittel danach auswählen und ausrichten und ihre Berechtigung, ihre Ansprüche, ihre möglichen Folgen öffentlich und verständlich darlegen und dazu ihren Erkenntnisweg und ihre Ergebnisse über die Gemeinsprache zugänglich machen." [He74; S. 136f.] "Die immer notwendiger werdende Restrukturierung der Wissenschaften in sich - um sie besser lernbar, gegenseitig verfügbar und allgemeiner (d.h. auch jenseits der Fachkompetenz) kritisierbar zu machen - kann und muß nach Mustern vorgenommen werden, die den allgemeinen Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungsformen unserer Zivilisation entnommen sind." [He74; S. 33f.]

Es wird nicht verwundern, daß es uns nicht leicht fiel, die Hentigsche Forderung nach Restrukturierung der Wissenschaften in der Mathematik konkret umzusetzen. Trotzdem hat sich seine programmatische Forderung sowohl in der Lehre als auch in der Forschung als eminent fruchtbar erwiesen. Welche Auffassung über die Restrukturierung von Mathematik sich bei uns ausgebildet hat, habe ich in einem Aufsatz über *"Versuche der Restrukturierung von Mathematik am Beispiel der Grundvorlesung 'Linearen Algebra"* folgendermaßen beschrieben:

> "Im Idealfall entfaltet ein restrukturierter Aufbau eine mathematische Theorie in Rückbindung an die Wirklichkeit; dabei werden nicht nur die notwendigen Abstraktionen durch weitgreifende Interpretationen in beziehungsreichen Bedeutungsfeldern verankert, sondern es werden auch die vielfach unbewußten Zwecke, Grenzen und Gefahren für die Anwendungen der Theorie verdeutlicht. Restrukturierung soll somit eine Theorie nicht nur besser mitteilbar, lernbar und verfügbar, sondern auch kritisierbar machen. Die Rückführung in die Anschauung beinhaltet insbesondere, daß ein möglichst großer Anteil der Verständigung über die Theorie in der Gemeinsprache ermöglicht werden sollte. Für den Lernenden stellt sich der restrukturierte Aufbau als eine Folge sich erweiternder Inhaltsbereiche

> dar, die für sich genommen sinnvolle Lerneinheiten sind und zu fruchtbarer Weiterarbeit befähigen; dazu wird der Lernende ständig angehalten, sich mit Sinn und Gehalt der Theorie auseinanderzusetzen." [Wi81; S. 105]

Zum ersten Mal habe ich einen *restrukturierten Aufbau* einer mathematischen Theorie im Studienjahr 1978/79 anhand der Grundvorlesung *"Lineare Algebra"* ausgearbeitet (s. [Wi79],[Wi81]). Ausgegangen bin ich dabei von der Frage: "Warum treibt man (Lineare) Algebra und was ist ihre Bedeutung?" Um eine grundlegende Orientierung zu vermitteln, aus der sich der gesamte Aufbau der zu unterrichtenden Theorie entwickeln läßt (s. Abbildung 1), habe ich folgende Antwort an den Anfang gestellt:

> "Die Bedeutung der (Linearen) Algebra liegt darin, daß sie als Sprache 'gute' Beschreibungen von Gegebenheiten unserer technisch-wissenschaftlichen Welt ermöglicht."

Was unter *'guten'* Beschreibungen verstanden werden kann, ist dann an Adjektiven wie *allgemein, adäquat, beziehungsreich, effektiv, einfach, fruchtbar, ökonomisch, präzise, verständlich, vollständig usw.* erläutert worden. Als wichtige Beispiele für algebraische Beschreibungen sind zunächst die Beschreibung der *Zeichenebene* durch komplexe Zahlen, des *Anschauungsraumes* durch Tripel reeller Zahlen, von *Listen und Tabellen* durch Zahlenmatrizen und von *binären Nachrichten* durch Linearcodes behandelt worden.

Der systematische Aufbau beginnt dann mit der Bereistellung der Mengensprache als *Extensionalisierung begrifflichen Denkens*, um insbesondere grundlegende Mathematisierungen verständlich zu machen. Zentral für den restrukturierten Aufbau sind die zwei Kapitel über die beiden Grundtypen mathematischen Beschreibens von Begriffsextensionen (Mengen): das *Beschreiben durch Erzeugen* und das *Beschreiben durch Aussondern.* Hier wird beispielsweise deutlich gemacht, daß das Lösen linearer (Un-)Gleichungssysteme als Übergang von der indirekten Beschreibung durch Aussondern zu der direkten Beschreibung durch Erzeugen verstanden werden kann. Ein weiteres wichtiges Thema ist der *Wechsel zu besseren Beschreibungen*, um vor allem effektiver und ökonomischer Probleme lösen zu können. Zu diesem Thema gehören auch die *dualen Beschreibungen*, die mit Adjunktion und Orthogonalität zusammenhängen. Insgesamt konnte der übliche Stoff der Grundvorlesung "Linerare Algebra" aus der Beschreibungsthese in vielfältigen Bedeutungszusammenhängen entwickelt und damit ein beziehungreiches Lernen ermöglicht werden. Nach diesem restrukturierten Aufbau ist die Lineare Algebra seit 1978 schon mehrmals mit erfreulichem Erfolg an der TH Darmstadt unterrichtet worden.

3 Allgemeine Mathematik als Allgemeine Wissenschaft

Reaktionen und Auseinandersetzungen mit dem Programm der Restruktuierung von Wissenschaft haben gezeigt, daß es notwendig ist, die Restruktuierung im Rahmen eines umfassenderen Konzeptes zu sehen und zwar des einer *"Allgemeinen Wissenschaft"*. Was unter *"Allgemeiner Wissenschaft"* zu verstehen ist, habe ich in einem Beitrag zur THD-Vortragsreihe *"Verantwortung in der Wissenschaft"* (1987) auszuführen versucht (s. [Wi88]). Bezogen auf die Mathematik ergibt das dort Gesagte, daß *"Allgemeine Mathematik"* gekennzeichnet ist durch

- die *Einstellung*, Mathematik für die Allgemeinheit zu öffnen, sie prinzipiell lernbar und kritisierbar zu machen,
- die *Darstellung* mathematischer Entwicklungen in ihren Sinngebungen, Bedeutungen und Bedingungen,
- die *Vermittlung* der Mathematik in ihrem lebensweltlichem Zusammenhang über die Fachgrenzen hinaus,
- die *Auseinandersetzung* über Ziele, Verfahren, Wertvorstellungen und Geltungsansprüche der Mathematik.

Die *Einstellung*, Mathematik für die Allgemeinheit zu öffnen, sie prinzipiell lernbar und kritisierbar zu machen, ist alles andere als selbstverständlich. Tradierte Vorstellungen, Denkmuster und Verhaltensweisen im Bereich der Mathematik stehen einer solchen Öffnung nur zu oft entgegen. Besonders der Drang nach Abstraktion und Exaktheit macht es dem Mathematiker schwer, sich mit seinem Denken der Komplexität konkreter Wirklichkeit auszusetzen und andere Erkenntnis- und Verstehensweisen zu akzeptieren. So ist er weitgehend hilflos (wenn nicht sogar desinteressiert), seine Wissenschaft für die Allgemeinheit verständlich und öffentlicher Kritik zugänglich zu machen. Doch kommt die Mathematik nicht daran vorbei, daß Bedeutungen und Sinngebungen mathematischen Tuns letztendlich von der menschlichen Gesellschaft bestimmt und beurteilt werden. Schon deshalb ist es wichtig für die Mathematik, sich um allgemeine Verständigung und kritische Auseinandersetzung zu bemühen.

Die *Darstellung* mathematischer Entwicklungen in ihren Sinngebungen, Bedeutungen und Bedingungen liegt in den meisten Bereichen der Mathematik im argen. Wissenschaftliche Lehrbücher der Mathematik sagen in der Regel überhaupt nichts mehr über lebensweltliche Bedeutung und die Mathematik konstituierende Wirklichkeitsbezüge aus. Der fortschreitenden Spezialisierung fällt zunehmend Zusammenhang zum Opfer, so daß es in vielen Bereichen schon schwer fällt, überhaupt noch Sinn und Bedeutung auszumachen. Um so wichtiger ist es, die Bedeutsamkeit mathematischer Theorien, insbesondere ihre Anlässe und Bindungen zur Realität herauszuarbeiten. Es gilt die sicherlich aufwendige Restrukturierung der Mathematik zu betreiben, d.h. ihre Rückführung in ein Allgemeinverständnis nach Mustern, "die den allgemeinen Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungsformen unserer Zivilisation entnommen sind" [He74; S. 34], wobei auch die geschichtliche Dimension mit einzubeziehen ist.

Die *Vermittlung* der Mathematik in ihrem lebensweltlichen Zusammenhang über die Fachgrenze hinaus sollte sich nicht in popularisierenden Einführungen erschöpfen, sondern Mathematik an ihren Prinzipien, Methoden, Aufgaben und Zusammenhängen verstehbar und lernbar machen. Hierzu gilt es, reichhaltige Ausdrucksmittel, insbesondere die Gemeinsprache heranzuziehen. Da sich lebensweltliches Verstehen überwiegend am Einzelnen festmacht, ist das Allgemeine der Mathematik in enger Anbindung an konkrete Anlässe und Bedeutungen zu vermitteln. Dabei ist immer wieder klarzumachen, daß man die Wirklichkeit niemals (auch nur annähernd) vollständig mathematisieren kann. So ist es ein Gebot von Verantwortung, stets auf die Grenzen und Gefahren der Anwendung mathematischer Methoden aufmerksam zu machen.

Die *Auseinandersetzung* über Ziele, Verfahren, Wertvorstellungen und Geltungsansprüche der Mathematik fällt Mathematikern nicht nur schwer, viele von ihnen haben sogar eine starke Abneigung dagegen. Dabei ist es eine gewichtige Frage, wieweit Mathematik uns in unserem Menschsein positiv unterstützt oder negativ beeinflußt. Durchaus namhafte Wissenschaftler warnen vor der zunehmenden Mechanisierung unseres Denkens, die einen Abbau menschlicher Autonomie befürchten läßt. Unterstützt, ja verursacht nicht die Mathematik durch Formalisierung und Algorithmisierung das Anwachsen mechanistischen Denkens? An diesem Problemkreis wird deutlich, wie grundsätzlich Mathematik von Fragen nach Wertvorstellungen und Geltungsansprüchen betroffen wird. Zur Diskussion derartiger Fragen hat die Mathematik eine kommunikative Rationalität zu aktivieren, die die menschliche Lebenswelt in all ihren Bestimmungen und Bedingungen einbezieht.

Nach der gegebenen Kennzeichnung ergibt sich als Aufgabe der *Allgemeinen Mathematik*, für mathematische Gebiete bezogen auf deren Begriffe, Aussagen, Methoden und Verfahren

- Anlässe und Auswirkungen zu beschreiben,
- Zwecke und Ziele darzustellen,
- Bedeutungen und Interpretationen aufzudecken,
- Beziehungen und Zusammenhänge aufzuzeigen,
- Denk- und Anwendungsmuster auszuarbeiten,
- konkrete Sachverhalte theoriegerichtet zu analysieren,

- Grenzen und Gefahren zu benennen,
- historische Auffassungen und Bedingtheiten zu berücksichtigen,
- unangemessene Behinderungen offenzulegen,
- reichhaltige Ausdrucksmittel einzusetzen, insbesondere die Gemeinsprache.

Zu den einzelnen Aufgaben der Allgemeinen Mathematik wäre vieles zu sagen, was aber der vorgesehene Umfang dieses Beitrages nicht zuläßt. Statt dessen soll kurz beispielgebend berichtet werden, wie wir in unserem Seminar *"Allgemeine Mathematik"* an der TH Darmstadt das Thema *"Allgemeine Mathematische Statistik"* angegangen sind. Am Anfang stand für uns die Frage: Was ist "Mathematische Statistik" und was ist ihre Aufgabe? Um für die Diskussion von Antworten auf diese Frage vielfältiges Material präsent zu haben, wurde zunächst ein breites Spektrum von einschlägigen Texten zusammengetragen und zu einem Reader [HL88] zusammengestellt. Nach kritischer Durchsicht und intensiver Diskussion wurde dann - auch gegründet auf unsere pragmatische bzw. diskursphilosophische Auffassung von Wissenschaft (vgl. [Wi94a]) - folgende Aufgabenbestimmung der Mathematischen Statistik formuliert:

> "Aufgabe der Mathematischern Statistik ist, mathematische Modelle und Verfahren zur Gewinnung, Darstellung und Auswertung von Daten zu entwickeln, zu untersuchen und anwendbar zu machen. Die Modelle und Verfahren der Mathematischen Statistik müssen den Prozeß kritischer Auseinandersetzung mit ihnen, ihren Anwendungen und ihren Ergebnissen unterstützen."

Aus dieser Aufgabenbestimmung ergab sich als Nächstes die Frage nach den Grundtypen von Datenstrukturen, die die Schnittstelle zwischen Mathematischer Statistik und Wirklichkeit darstellen. Erstaunlicherweise war eine Antwort auf diese Frage aus der Fachliteratur wie auch von Fachvertretern nicht zu bekommen. Wir haben dann selbst möglichst viele Verfahren und Beispiele aus der Mathematischen Statistik studiert und daraus eine uns überzeugende Antwort abgeleitet, die wir als tragend für die weitere Restrukturierung der Mathematischen Statistik ansehen. Im Rahmen dieses Beitrages ist es nicht möglich, auf diese Bemühungen um eine Allgemeine Mathematische Statistik im einzelnen einzugehen. Auch zu den Bemühungen um *Allgemeine Mathematik* in anderen mathematischen Teilgebieten kann hier nur auf die Manuskripte und Arbeiten [Wi79], [Wi81], [Wi82], [DW82], [PW86], [Wi87], [Wi90], [Wi93a], [Wi93b], [Wi93c], [LW93], [Ro93], [Wi94b] verwiesen werden.

4 Allgemeinbildender Mathematikunterricht

Kehren wir wieder zurück zum Mathematikunterricht in der Schule. Auch wenn die Anklage von Stella Baruk für uns überzogen erscheinen mag, muß uns doch das Problem, wie sinnvoller Mathematikunterricht für alle Beteiligten möglich ist, betroffen machen. Führen wir uns noch einmal vor Augen, was offizieller Grundkonsens für schulische Bildung in unserer Gesellschaft ist. In dem *"Strukturplan für das Bildungswesen"*, den die von Bund und Ländern pluralistisch zusammengesetzte Bildungskommission 1970 vorgelegt hat, heißt es:

> "Das umfassende Ziel der Bildung ist die Fähigkeit des einzelnen zu individuellem und gesellschaftlichem Leben, verstanden als seine Fähigkeit, die Freiheit und die Freiheiten zu verwirklichen, die ihm die Verfassung gewährt und auferlegt." [Bi90; S. 29]

Und daran anschließend:

> "Die Ansprüche auf schulische Bildung und freie Entfaltung der Persönlichkeit führen zu dem Grundsatz, daß jeder einzelne so weit wie möglich zu fördern ist." [Bi90; S. 31]

Deshalb ist die Schule primär als *allgemeinbildende Schule* für alle zu verstehen. Die aktuelle Diskussion um Allgemeinbildung unterstreicht das noch einmal aufs Neue. Wer sich über den Stand der wissenschaftlichen Diskussion zur Allgemeinbildung informieren möchte, dem empfehle ich den vom Bielefelder *"Institut für Didaktik der Mathematik"* 1990 herausgegebenen Band *"Allgemeinbildung und Öffentliche Schule: Klärungsversuche"*. Eindrucksvoll an dem Band ist, daß die fünf Autoren ihren durchaus unterschiedlich ausgerichteten Beiträgen einen gemeinsam verfaßten Aufsatz voranstellen und zwar zum Thema *"Allgemeinbildung als Aufgabe der öffentlichen Schule"*. Gemeinsam formulieren die Autoren:

> "Der Begriff der Allgemeinbildung [...] bezieht sich auf den Vorrat an sozio-kulturellen Errungenschaften, den eine Gesellschaft ansammelt, nutzt und überliefert, um fortbestehen zu können. [...] Er umfaßt die Voraussetzungen und Zugänge zur Teilhabe an diesem Vorrat, die gewährleistet, daß die Mitglieder einer arbeitsteiligen, demokratischen Gesellschaft sich über die gemeinsamen Angelegenheiten verständigen und an ihrer Ausgestaltung mitwirken können. Er umreißt die universellen Prämissen für eine öffentliche und vernunftgemäße, tendenziell die gesamte Menschheit umfassende Kommunikation und Kooperation." [HT89; S. 11]

Wie eine derartige Bestimmung von Allgemeinbildung in der Mathematik Gestalt annehmen kann, hat einer der Autoren, Hans Werner Heymann, in dem Themenheft *"Allgemeinbildender Mathematikunterricht"* der Zeitschrift *"Mathematiklehren"* [Hm89] und in [Hm93] ausgeführt; er diskutiert den allgemeinbildenden Mathematikunterricht anhand folgender Gliederung der *Aufgaben allgemeinbildender Schulen*:

- Lebensvorbereitung

- Stiftung kultureller Kohärenz
- Weltorientierung
- Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch
- Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft
- Einübung in Verständigung und Kooperation
- Stärkung des Schüler-Ich

Die anregenden Ausführungen Heymanns sind durchweg überzeugend, doch haben sie einen erstaunlichen Mangel, den auch andere Texte zur Allgemeinbildung haben: es fehlt in ihnen (trotz des häufig erwähnten "kritischen Vernunftgebrauches") die Kritik an der Fachwissenschaft, besonders deren Tendenz zur Sinn und Bedeutung verdrängenden Spezialisierung und Instrumentalisierung. Erwähnt sei stellvertretend nur der vielfältige Mißbrauch linearer Modelle von der Bildung von Durchschnittsnoten bis zur Faktorenanalyse in der Statistik. Nur zu oft unterdrückt die Autorität der mathematischen Methodik die angemessene Behandlung realer Gegebenheiten. Erinnern wir uns an die armen Lehrer, von deren negativen Versuchsantworten Stella Baruk berichtet; sie waren offenbar von der Autorität der Mathematik so eingeschüchtert, daß sie den Gebrauch der eigenen Vernunft ausschalteten und sich auf ein sinnloses Manipulieren mathematischer Symbole einließen.

Da Mathematik heute viele Bereiche unseres Lebens nachhaltig beeinflußt und da Allgemeinbildung sich auf die wesentlichen Einflußfaktoren in unserer Lebenswelt bezieht, ist es eine wichtige Aufgabe der mathematischen Wissenschaft, das Verhältnis von *Mathematik und Allgemeinbildung* zu klären. Um noch einmal mit Hartmut von Hentig zu sprechen: Mathematik muß ständig reflektiert und durchgearbeitet werden, "um sie besser lernbar, gegenseitig verfügbar und allgemeiner (d.h. auch jenseits der Fachkompetenz) kritisierbar zu machen". Die Instanz, die diese Aufgabe erfüllt bzw. erfüllen soll, ist die *Allgemeine Mathematik.* Sie kann die Grundlage für einen wirklich allgemeinbildenden Mathematikunterricht abgeben. Das heißt: Schüler sollten Mathematik primär als Allgemeine Mathematik lernen, also insbesondere die Fähigkeit erwerben, Anlässe, Auswirkungen, Zwecke, Ziele, Bedeutungen, Interpretationen, Beziehungen, Zusammenhänge, Denk- und Anwendungsmuster, Sachanalysen, historische Auffassungen, Behinderungen des Denkens sowie reichhaltige Ausdrucksmittel im Bereich der Mathematik zu verstehen. Natürlich verstellt das nicht das Erlernen spezifischer Inhalte und Fertigkeiten, es wird eher den Lernerfolg bei solchen Inhalten steigern, die zur Entwicklung des angeführten Netzes von Fähigkeiten beitragen. Nicht genug kann betont werden (noch einmal sei Stella Baruk erwähnt), daß bei alledem reichhaltiger Gebrauch von der Gemeinsprache gemacht werden sollte.

Im allgemeinbildenden Mathematikunterricht gilt es, ein lebensnahes Verständnis von Mathematik zu vermitteln, für das Fragen nach Sinn, Bedeutung und Zusammenhang grundlegend sind. In diesem Sinne kann Allgemeine Mathematik als Bildungskonzept den allgemeinbildenden Auftrag öffentlicher Schule nachhaltig unterstützen.

5 Ein Beispiel: Mengenlehre und Formale Begriffsanalyse

Wenigstens an einem Beispiel soll ausführlicher beschrieben werden, wie auf der Grundlage Allgemeiner Mathematik allgemeinbildender Mathematikunterricht gestaltet werden kann. Dazu soll das Thema *"Mengenlehre und Formale Begriffsanalyse"* gewählt werden, da zu dem Thema neben reichhaltigen universitären Erfahrungen auch solche im schulischen Bereich vorliegen (s. vor allem [Th93]) und zudem die Formale Begriffsanalyse selbst aus dem Bemühen um Restrukturierung der Mathematik hervorgegangen ist (s. [Wi82]). Konkret soll von der Erstsemesterveranstaltung *"Mathematik für Sozialwissenschaftler"* (s. [Wi87] und auch [Ro93]) berichtet werden, die - wie schon geschehen - gerade mit dem hier thematisierten Teil auch gut in der Schule unterrichtet werden kann.

In dem Kapitel *"Mengenlehre"* geht es darum, Sozialwissenschaftlern so die Mengensprache nahezubringen, daß sie mengensprachliche Modellierungen realer Zusammenhänge kritisch nachvollziehen und ggf. aktiv verwenden können. Mit einer rein mathematischen Einführung in die Mengenlehre kann erfahrungsgemäß das vorgegebene Ausbildungsziel nicht erreicht werden; ja eine für Sozialwissenschaftler bedeutungslos gebotene Mengenlehre kann durch die empfundene Sinnlosigkeit psychische Blockaden verursachen, die kaum mehr abgebaut werden können. In der Veranstaltung wurde deshalb die Mengenlehre in Verbindung mit der *Formalen Begriffsanalyse* entwickelt, wodurch immer wieder vielfältige Sinnbezüge hergestellt werden konnten. So beginnt das Kapitel "Mengenlehre" zunächst mit folgender Kurzeinführung in die traditionelle Begriffslehre:

> "Das Denken in Begriffen ist eine Möglichkeit, sich in der unüberschaubaren Fülle von Gegebenheiten zurechtzufinden. Um die Tragweite dieses Denkens erfassen zukönnen, soll zunächst kurz darauf eingegangen werden, was unter einem *Begriff* verstanden wird. In der Begriffslehre werden als Bestimmungsstücke eines Begriffes sein *Umfang (Extension)* und sein *Inhalt (Intension)* angegeben; dabei wird unter dem Umfang eines Begriffes die Gesamtheit aller *Gegenstände (Objekte)* verstanden, die der Begriff umfaßt, und unter dem Inhalt die Vielfalt der *Merkmale (Attribute)*, die auf alle Gegenstände des Begriffes zutreffen. Beispielsweise besteht für den Begriff "Mensch" der Umfang aus allen Menschen,

die gelebt haben, die gegenwärtig leben und die zukünftig leben werden, der Inhalt dagegen aus Merkmalen wie "einen Leib haben", "ein Gehirn haben", "ein Bewußtsein besitzen" usw. Schon das Beispiel "Mensch" macht eine grundsätzliche Schwierigkeit für das Umgehen mit Begriffen deutlich, und zwar die Schwierigkeit, daß man häufig Umfang und Inhalt eines Begriffes nur teilweise zu fassen bekommt. Um dieser Schwierigkeit zu begegnen, werden im wissenschaftlichen Bereich Umfänge und Inhalte von Begriffen durch *Abgrenzungen (Definitionen)* festgelegt. Daß dieses auch in vielen nichtwissenschaftlichen Bereichen üblich ist, belegen die DIN-Normen *DIN 2330 "Begriffe und Benennungen"* und *DIN 2331 "Begriffssysteme und ihre Darstellung"*, in denen für Begriffsinhalte nur schon an Gegenständen festgestellte Merkmale zugelassen werden." [Wi87; S. 3f]

An dem beschränkten Datenkontext in Abbildung 2 (vgl. [Wi84]) wird dann gezeigt, wie gerade durch die Begrenzung eine vollständige Bestimmung der Begriffe des vorliegenden Kontextes möglich ist; das System aller Begriffe des Kontextes kann sogar in einem Ordnungsdiagramm, das die Unterbegriff-Oberbegriff-Relation wiedergibt, veranschaulicht werden (s. Abbildung 3). Durch den damit praktizierten intuitiven Umgang mit Mengen in einem Sinnbezug (Planung eines Lehrfilmes) ist die Motivation gegeben, die ersten Begrifflichkeiten der Mengenlehre einzuführen und zu folgender Modellierung eines Datenkontextes zu verwenden:

> "Die für eine vollständige Begriffsbestimmung notwendige Abgrenzung eines Kontextes kann man durch die Angabe einer Gegenstandsmenge, einer Merkmalsmenge und der Relation 'der Gegenstand x hat das Merkmal m' erreichen. Allgemein definiert man deshalb einen *(formalen) Kontext* als ein Tripel (G, M, I), wobei G und M Mengen sind und I eine Relation zwischen G und M ist; die Elemente von G heißen *Gegenstände*, die von M *Merkmale*. Ist gIm für $g \in G$ und $m \in M$ (d.h. $(g, m) \in I$), dann sagt man: 'der Gegenstand g hat das Merkmal m'." [Wi87; S. 14]

Durch unterschiedliche Fragen begrifflicher Strukturierung werden in immer neuen Sinnbezügen weitere Begrifflichkeiten der Mengensprache motiviert wie Mengenbeschreibungen, Durchschnitt, Vereinigung, Komplement, Differenz, Mengengleichungen, Abbildung, Klasseneinteilung, Äquivalenzrelation, direktes Produkt u. a. Dabei wird auch immer wieder das Entwickelte kritisch reflektiert; stellvertretend für diese Reflektionsteile sei hier nur der Schluß des Kapitels zitiert:

> "Nach der Bereitstellung eines grundlegenden Stücks Mengensprache ist es an der Zeit zu klären, inwieweit die bereitgestellten Sprachmittel begriffliches Denken erfassen können. Der erste Schritt liegt in der Abgrenzung eines Kontextes durch die Festlegung einer Gegenstandsmenge und einer

Merkmalsmenge sowie einer Relation, die Gegenstände und Merkmale verbindet. Dadurch wird es möglich, einen Begriff eines Kontextes und die Beziehung "Unterbegriff-Oberbegriff" exakt zu definieren, wobei Begriffsumfang und Begriffsinhalt als grundlegende Bestimmungsstücke eingehen. Zu betonen ist, daß durch diese Abgrenzung zwar eine vollständige Begriffsanalyse möglich wird, daß dabei aber viel an Inhalt verloren gehen kann. Eine derartige mengensprachliche Modellierung nennt man *Extensionalisierung*, da dabei Begriffe auf ihren Umfang (Extension) reduziert werden. Es mag scheinen, daß im mengensprachlich definierten Kontext durch die Bereitstellung einer Merkmalsmenge auch die Intensionen von Begriffen einbezogen werden; doch wird gerade durch die Festlegung der Merkmalsmenge die Vielfalt der möglichen Merkmale ebenfalls auf eine Extension reduziert und damit auch auf der inhaltlichen Seite, wenn auch auf unterschiedlicher Stufe, eine Extensionalisierung vorgenommen. Trotz ihrer Beschränktheit werden extensionale Modelle mehr und mehr von den Wissenschaften benutzt, da sie präzise, übersichtlich, leicht handhabbar und mit elektronischen Rechenanlagen bearbeitbar sind. Nicht immer wird dabei allerdings der Versuchung widerstanden, mehr an Inhalt aus den Ergebnissen abzulesen, als das Modell zuläßt. Die *Gefahr von Über- bzw. Fehlinterpretationen* ist dann besonders groß, wenn auf die Modelle mathematische Methoden kritiklos angewendet werden, ohne deren Angemessenheit zu überprüfen." [Wi87; S. 50ff]

6 Ausblick

Wie sieht es nun mit der weiteren Entwicklung der *Allgemeinen Mathematik* aus? Zunächst muß der durchaus berechtigte Einwand erwähnt werden, daß Allgemeine Mathematik in dem beschriebenen Sinn kaum etabliert und entwickelt ist. Wenn dieser Einwand auch nicht die Überzeugung in die Notwendigkeit einer Allgemeinen Mathematik schmälern kann, ist er doch ernst zu nehmen und zwar dahingehend, daß alle potentiellen Kräfte (ob in Schule, Universität oder außerhalb) zu aktivieren sind, um zügig eine Allgemeine Mathematik aufzubauen. Es gibt schon eine Fülle von Ansätzen, Ideen und Untersuchungen, die in den Bestand einer Allgemeinen Mathematik eingehen können. Wichtig ist, daß sie im Rahmen einer einheitlichen Konzeption begriffen werden und damit kumulieren und breiter wirken können.

Daß man die Etablierung der Allgemeinen Mathematik durchaus optimistisch sehen darf, wird durch die substanzielle *philosophische Analyse* gestützt, die der Didaktiker Knut Radbruch 1991 in Darmstadt vorgetragen hat [Ra91]. Radbruch stellt heraus, daß schon in Platons Wissenschaftslehre, die Wissenschaft Mathematik von zwei Gruppen von Wissenschaftlern gestaltet und entfaltet wird: Der Dialektiker konstituiert Mathematik durch Mathematisierung und ist auch für die Anwendung mathematischer Resultate zuständig, während der Geometer/Arithmetiker das bereitgestellte Material rein logisch-theoretisch bearbeitet. Interessant ist, daß Platon den der Allgemeinen Mathematik nahestehenden Dialektiker höher einstuft als den Geometer bzw. Arithmetiker. Während Platons Philosophie Reaktion auf die Entdeckung der Möglichkeit von Wissenschaft, insbesondere von Mathematik ist, findet Leibniz schon einen beachtlichen Wissensstand vor, den er mit seinem Programm einer Restrukturierung der Wissenschaften basierend auf einer allgemeinen Wissenschaftssprache anzugehen versucht; dabei haben Darstellung und Deutung absolute Priorität gegenüber speziellen wissenschaftlichen Binnenstrukturen. Im Unterschied zu Platon gehören bei Leibniz allgemeine und spezielle Mathematik eng zusammen. Für die Gegenwart sieht Radbruch den Grund Allgemeiner Mathematik im *"Mathematischen"*, das nach einer scharfsinnigen Analyse von Heidegger die grundsätzliche Form menschlichen Wissens ist. Nach Heidegger ist das Mathematische "jene Grundstellung zu den Dingen, in der wir uns die Dinge vor-nehmen auf das hin, als was sie uns schon gegeben sind, gegeben sein müssen und sollen. Das Mathematische ist deshalb die Grundvoraussetzung des Wissens von den Dingen" (s. [Hd62], S. 58). In diesem Sinne hat für Radbruch die Allgemeine Mathematik die umfassende Aufgabe, Bedingungen und Realisierungen des "Mathematischen" im Wissen und Denken zu untersuchen, was deutlich weiter als die etablierte Fachwissenschaft Mathematik greift.

Doch ist es nicht nur die Verankerung des "Mathematischen" in der Wissensform, was die Allgemeine Mathematik zu einer Notwendigkeit macht. Noch umfassender erhält der Bezug zum Allgemeinen seine Bedeutung dadurch, daß - wie es die pragmatische Philosophie herausarbeitet (s. [Ap76],[Ha81]) - unser Denken und Handeln in der Intersubjektivität der menschlichen Kommunikationsgemeinschaft gegründet ist. Insbesondere sind Bedeutungen und Sinngebungen mathematischen Tuns auf das Engste mit einer *intersubjektiven Ethik* verbunden, deren rationale Begründung nach Karl-Otto Apel ihren Ursprung in der Möglichkeit und Notwendigkeit rationaler Argumentation in der menschlichen Kommunikationsgemeinschaft hat (s. in [Ap76] die wichtige Abhandlung "Das Apriori der Kommunikationsgemeinschaft und die Grundlagen der Ethik"). Konsequenz dieser Ethik ist, daß der Kommunikationspartner grundsätzlich in seiner menschlichen Autonomie anerkannt wird. Das betrifft auch die Kommunikation zwischen Lehrenden und Lernenden im Mathematikunterricht und beinhaltet somit insbesondere, daß die Lebens- und Sinnvorstellungen der Lernenden in angemessener Weise zu berücksichtigen sind.

Literatur

[Ap76] K.-O. Apel: Transformation der Philosophie. 2 Bände. Suhrkamp-Taschenbuch Wissenschaft 164/165, Frankfurt 1976.

[Ba89] S. Baruk: Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik. Birkhäuser, Basel 1989.

[Bi70] Bildungskommission des Deutschen Bildungsrates: Strukturplan für das Bildungswesen. Klett, Stuttgart 1970.

[DW82] G. Dorn, R. Frank, B. Ganter, U. Kipke, W. Poguntke, R. Wille: Forschung und Mathematisierung - Suche nach Wegen aus dem Elfenbeinturm. In: Berichte der AG Mathematisierung, Bd. 3, GH Kassel 1982, 228–240; auch in: Wechselwirkung 15 (1982), 20–23.

[Ha81] J. Habermas: Theorie des Kommunikativen Handelns. 2 Bände. Suhrkamp, Frankfurt 1981.

[HL88] G. Hartung, K. Lengnink: Reader zum Thema "Allgemeine Statistik". Seminarmaterialien. TH Darmstadt 1988.

[Hd62] M. Heidegger: Die Frage nach dem Ding. Niemeyer, Tübingen 1962.

[He74] H. von Hentig: Magier oder Magister? Über die Einheit der Wissenschaft im Verständigungsprozeß. Suhrkamp, Frankfurt 1974.

[Hm89] H. W. Heymann: Allgemeinbildender Mathematikunterricht - was könnte das sein? Mathematiklehren, Heft 33 (1989), 4–9.

[Hm93] H. W. Heymann: Mathematische Schulbildung 2001: Versuch einer Akzentuierung aus bildungstheoretischer Sicht. Mathematik in der Schule 31 (1993), 449–456.

[HT90] H. W. Heymann, W. van Lück, M. Meyer, Th. Schulze, H.-E. Tenorth: Allgemeinbildung als Aufgabe der öffentlichen Schule. In: H. W. Heymann, W. van Lück (Hrsg.): Allgemeinbildung und öffentliche Schule: Klärungsversuche. IDM Bielefeld 1990.

[LW93] K. Lengnink, S. Prediger, U. Priß, R. Wille (Hrsg.): Projektseminar "Allgemeine Mathematik als Bildungskonzept für die Schule. FB Mathematik, TH Darmstadt 1993.

[PW76] W. Poguntke, R. Wille: Zur Restrukturierung der mathematischen Ordnungstheorie. In: A. M. Kempf, F. Wille (Hrsg.): Mathematische Modellierung. McGraw-Hill, Hamburg 1986, 283–293.

[Ra91] K. Radbruch: Philosophie als Vehikel der allgemeinen Mathematik. Vortragsmanuskript. Universität Kaiserslautern 1991.

[Ro93] T. Rock: Einführung in die Mathematik für Human- und Sozialwissenschaftler. Diplomarbeit. FB Mathematik, TH Darmstadt 1993.

[Th93] S. Thamm: Kurs "Formale Begriffsanalyse" - Eine Brücke zwischen formalem und inhaltlichem Denken. Staatsexamensarbeit. FB Mathematik, TH Darmstadt 1993.

[Wi79] R. Wille: Lineare Algebra. Vorlesungsskript. FB Mathematik, TH Darmstadt 1978/79.

[Wi81] R. Wille: Versuche der Restrukturierung von Mathematik am Beispiel der Grundvorlesung "Lineare Algebra". Beiträge zum Mathematikunterricht 1981. Schroedel, Hannover 1981, 102–112.

[Wi82] R. Wille: Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. In: I. Rival (ed.): Ordered sets. Reidel, Dordrecht-Boston 1982, 445–470.

[Wi84] R. Wille: Liniendiagramme hierarchischer Begriffssysteme. In: H. H. Bock (Hrsg.): Anwendungen der Klassifikation: Datenanalyse und numerische Klassifikation. Indeks-Verlag, Frankfurt 1984, 32–51.

[Wi87] R. Wille: Mathematik für Sozialwissenschaftler. Vorlesungsskript. FB Mathematik, TH Darmstadt WS 1986/87.

[Wi88] R. Wille: Allgemeine Wissenschaft als Wissenschaft für die Allgemeinheit. In: H. Böhme, H. J. Gamm (Hrsg.): Verantwortung in der Wissenschaft. TH Darmstadt 1988, 159-176.

[Wi90] R. Wille: Einführung in die Algebra. Vorlesungsskript. FB Mathematik, TH Darmstadt WS 1989/90.

[Wi93a] R. Wille: Lernzentren an der Technischen Hochschule Darmstadt. In: Hessisches Ministerium für Wissenschaft und Kunst (Hrsg.): Tagung "Programm zur Verbesserung der Lehre an den Hessischen Hochschulen". Schriftenreihe Hochschulen 6 (1993), 26–29.

[Wi93b] R. Wille: Allgemeine Algebra als Allgemeine Mathematik. Vortragsmanuskript. FB Mathematik, TH Darmstadt 1993.

[Wi93c] R. Wille: "Allgemeine Mathematik" als Leitvorstellung für das Mathematikstudium. Vortragsmanuskript. FB Mathematik, TH Darmstadt 1993.

[Wi94a] R. Wille: Plädoyer für eine philosophische Grundlegung der Begrifflichen Wissensverarbeitung. In: R. Wille, M. Zickwolff (Hrsg.): Begriffliche Wissensverarbeitung: Grundfragen und Aufgaben. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1994, 11–25.

[Wi94b] R. Wille: Restructuring mathematical logic: an approach based on Peirce's pragmatism. In: P. Agliano, A. Ursini (eds.): International Conference on Logic and Algebra. Siena 1994 (erscheint)

Lineare Algebra

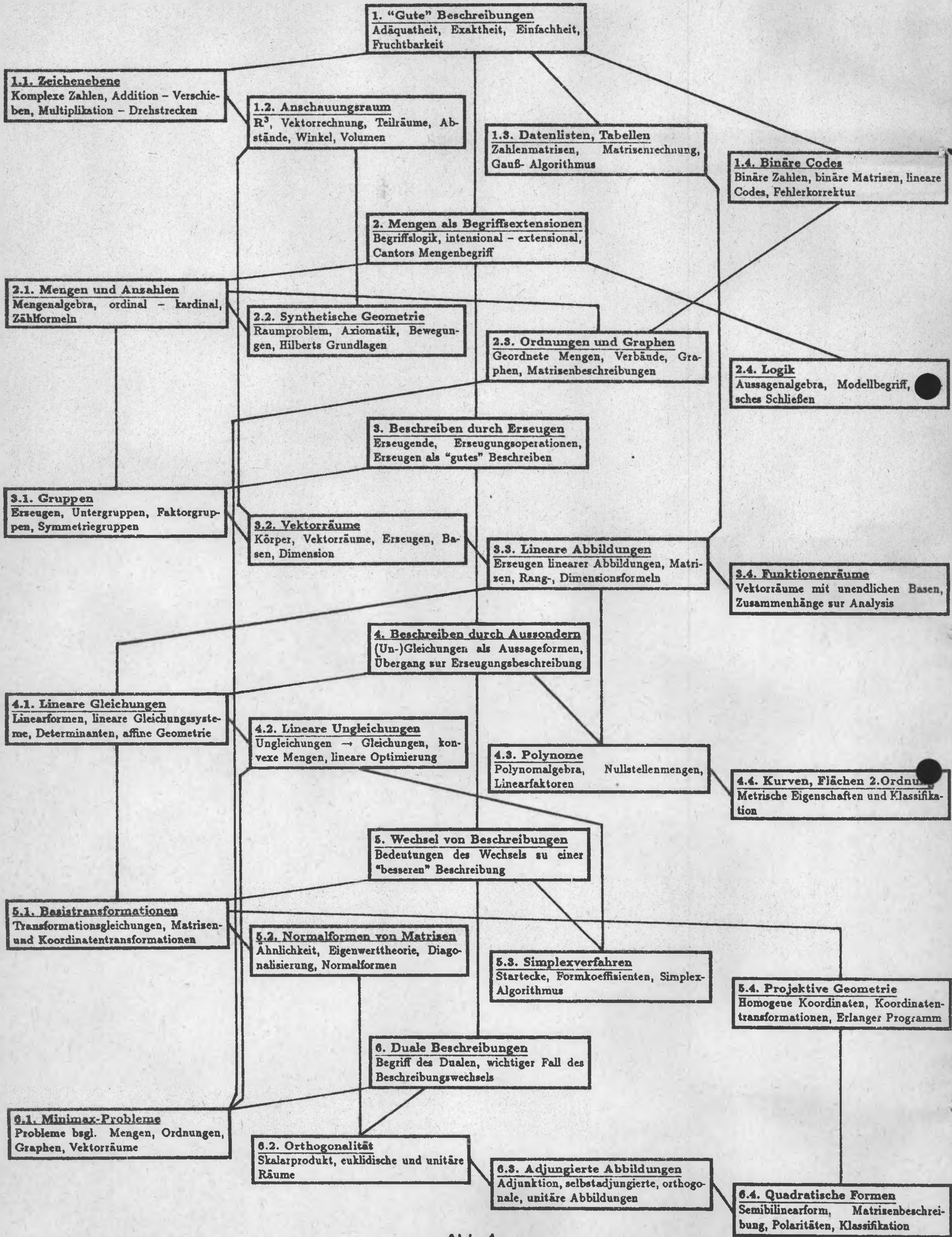

Abb.1

		a	b	c	d	e	f	g	h	i
		benötigt Wasser zum Leben	lebt im Wasser	lebt auf dem Land	braucht Blattgrün zur Nahrungsaufbereitung	zweikeimblättrig	einkeimblättrig	fähig zum Ortswechsel	hat Gliedmaßen	säugt seine Jungen
1	Fischegel	x	x					x		
2	Brasse	x	x					x	x	
3	Frosch	x	x	x				x	x	
4	Hund	x		x				x	x	x
5	Wasserpest	x	x		x		x			
6	Schilf	x	x	x	x		x			
7	Bohne	x		x	x	x				
8	Mais	x		x	x		x			

Abb.2 : Kontext zu einem Lehrfilm "Lebewesen und Wasser"

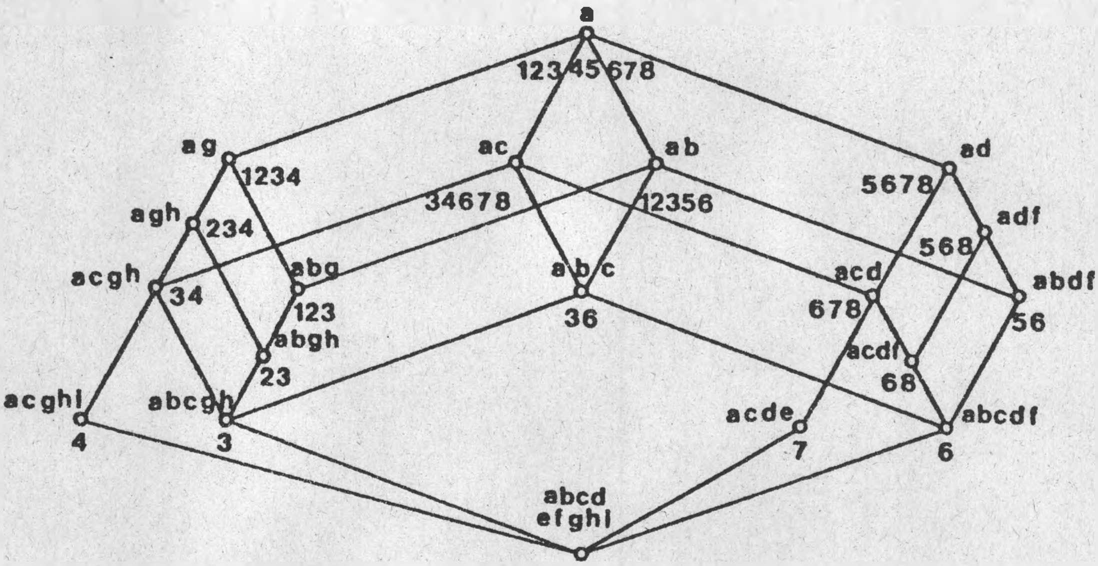

Abb.3 : Begriffsverband zum Kontext von Abb. 1