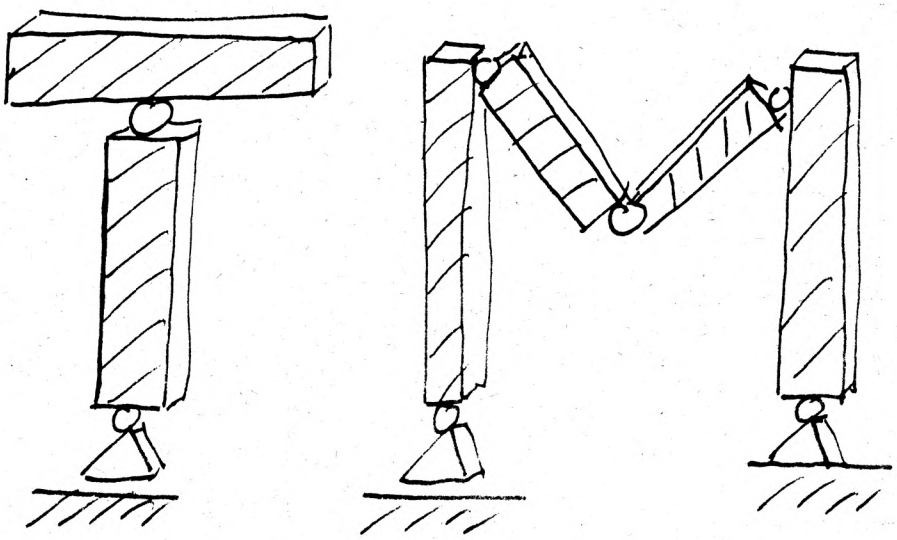
FACHSCHAFT MASCHINENBAU



Vor-Diptome

März '93 - S. 1
Sept '92 - S. 18
März '92 - S. 29
März '88 - S. 35
Sept '86 - S. 51

Technische Hochschule Darmstadt

Diplom-Vorprüfung in Technischer Mechanik

am 15. März 1993

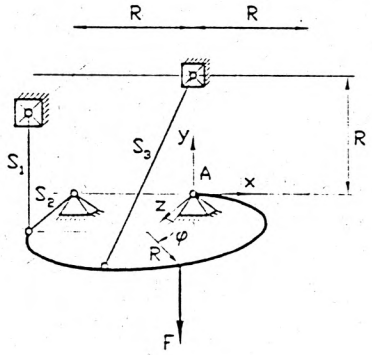
(Name) (Vorname) (Matr.-Nr.) (FB)

Die Aufgaben sind nicht nach ihrem Schwierigkeitsgrad geordnet. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und numerieren Sie die Blätter. Der Lösungsweg soll klar erkennbar sein, die Ergebnisse müssen deutlich hervorgehoben werden.

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines DIN A4-Blattes, sowie die drei Hilfsblätter zur TM II (Biegelinientafel, Koppeltafel und Hilfsblatt zur Torsion) und einen Taschenrechner zu benutzen. Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt.

Aufgabe 1: (MB, WI/MB, BI)

Ein horizontaler starrer Träger in der Form eines 3/4-Kreises in der x,z-Ebene ist im Punkt A unverschieblich gelenkig gelagert und wird von drei Stäben gehalten. Der Träger ist senkrecht zu seiner Ebene durch eine Einzelkraft F belastet, die an beliebiger Stelle φ angreift. Berechnen Sie die Stabkräfte S_1, S_2 und S_3 und die Lagerreaktionen in A.

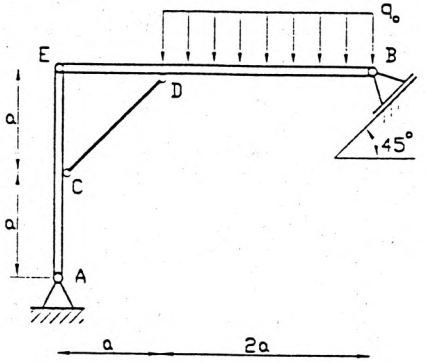


Aufgabe 2: (MB, WI/MB, BI)

Das skizzierte Tragwerk ist durch eine Gleichstreckenlast q_0 belastet.

a) Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen in A und B sowie die Stabkraft im Stab CD.

b) Skizzieren Sie die Verläufe der Schnittgrößen (N, Q, M) und geben Sie die ausgezeichneten Werte an.

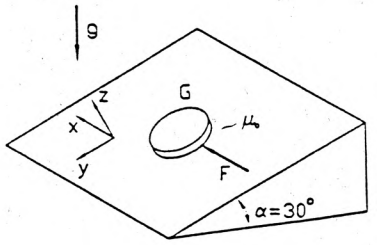


Aufgabe 3: (MB, WI/MB, BI)

Auf einer rauhen schiefen Ebene ($\alpha = 30°$, $\mu_0 = \sqrt{2/3}$) liegt eine Kreisscheibe mit dem Gewicht $G = 100N$. Sie wird, wie skizziert, durch eine Kraft F in x-Richtung belastet.

a) Wie groß kann die Kraft F maximal werden, ohne daß sich die Scheibe bewegt ?

b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Wirkungslinien der Kraft F und der Haftkraft H_0, wenn die Scheibe gerade anfängt zu rutschen (Haftgrenzfall).



Aufgabe 4: (MB, WI/MB, BI)

Bei einem ebenen Problem (ebener Spannungszustand) sind die Spannungen σ_x, σ_y und τ_{xy} in einem Punkt bekannt. An diesem Punkt werden die Hauptdehnungen ε_1 und ε_2 gemessen.

Wie groß sind der Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl des verwendeten Materials ?

Gegeben: $\sigma_x = 60 N/mm^2$, $\sigma_y = -20 N/mm^2$,
$\tau_{xy} = 30 N/mm^2$, $\varepsilon_1 = 0.0006$,
$\varepsilon_2 = -0.0004$.

Aufgabe 5: (MB, WI/MB, BI)

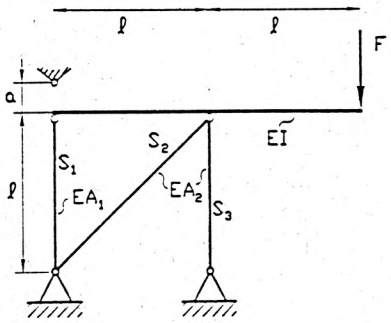
Ein Balken der Länge 2ℓ ist in der skizzierten Weise durch Stäbe gelagert und und durch eine Kraft F belastet. Im Abstand a ($a \ll \ell$) über dem linken Balkenende befindet sich ein Lager, das die vertikale Bewegung dieses Punktes begrenzt. Es sei $EA_2 > EA_1$.

a) Ab welcher Last $F = F_a$ berührt das linke Balkenende das Lager ?

b) Bestimmen Sie die Absenkung des Lastangriffspunktes für $F < F_a$.

c) Wie groß ist die Absenkung des Lastangriffspunktes für Lasten $F > F_a$?

Hinweis: Die Verwendung der Biegelinientafel wird empfohlen.

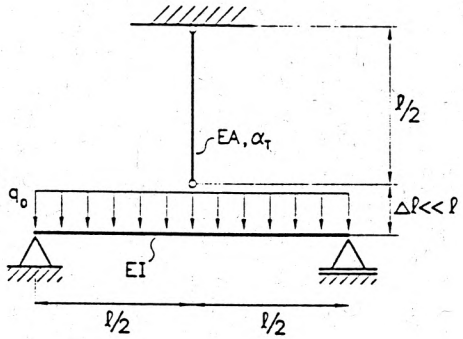


Aufgabe 6: (MB, WI/MB, BI)

Um einen Träger zu entlasten, wird er in der Mitte an einem Stab aufgehängt, der aber um $\Delta\ell$ zu kurz ist.

a) Welche Temperaturerhöhung des Stabes ist für einen spannungsfreien Einbau (Balken noch nicht belastet) notwendig ?

b) Wie groß sind die Stabkraft und das Biegemoment in der Feldmitte, nachdem der Balken belastet und der Stab wieder abgekühlt wurden ?



Aufgabe 7: (MB, WI/MB, BI)

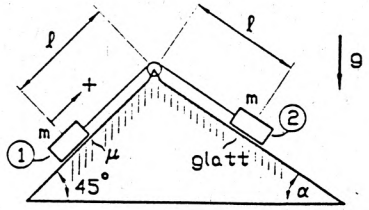
Das dargestellte System besteht aus einer reibungsfrei drehbaren Rolle (Trägheitsmoment $\Theta = 0$) und zwei Quadern (Massen $m_1 = m$, $m_2 = m$), die mit einem Seil vernachlässigbarer Masse verbunden sind. Der Reib- und Haftkoeffizient zwischen dem Quader 1 und der schiefen Ebene beträgt $\mu = \mu_0$. Der Quader 2 kann sich auf seiner Bahn reibungsfrei bewegen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das System aus der Ruhe losgelassen, wobei die Abstände zwischen den Quadern und der Rolle jeweils ℓ sind.

a) Für welche Winkel $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ bleibt das System in Ruhe ?

b) Wie groß sind die Beschleunigung $\ddot{x}$ der Quader und die Seilkraft für $\alpha < \alpha_1$?

c) Wie groß ist die Geschwindigkeit, mit der bei $\alpha < \alpha_1$ einer der Quader gegen die Rolle stößt ?

Gegeben: ℓ, m, $\mu = \mu_0$, α.



Aufgabe 9: (MB, WI/MB, BI)

Die aus zwei Massenpunkten (jeweils Masse m) und einem Verbindungsstab (Länge ℓ, Masse vernachlässigbar) bestehende Hantel wird in der abgebildeten Lage aus der Ruhe losgelassen.

Der Stoß des unteren Massenpunktes mit der festen und glatten Unterlage sei ideal elastisch.

a) Wie groß sind die Schwerpunktsgeschwindigkeit v_S^- und die Winkelgeschwindigkeit ω^- der Hantel unmittelbar vor dem Stoß?

b) Bestimmen Sie die Schwerpunktsgeschwindigkeit v_S^+ und die Winkelgeschwindigkeit ω^+ der Hantel unmittelbar nach dem Stoß.

Gegeben: m, ℓ, $h = (2 + \frac{\sqrt{2}}{4})\ell$.

Aufgabe 10: (BI)

In der Skizze sind die Trajektorien von zwei Wasserstrahlen aus einem Tank dargestellt. Die Ausflüsse sind so gestaltet, daß die Wasserstrahlen am Tank eine horizontale Tangente haben. Bestimmen Sie bei gegebenen Werten von a und b die Höhe h so, daß die Strahlen an der gleichen Stelle auf den Boden auftreffen ($x_1 = x_2$).

Gegeben: a, b.

Aufgabe 8: (MB, WI/MB, BI)

Ein Getriebe besteht aus den Rädern 1 und 2 und der Stange 3. Das Rad 1 dreht sich um den Punkt D mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = const.$ Das Rad 2 dreht sich um den Punkt E und rollt im Punkt B ohne zu gleiten auf dem Rad 1 ab. Die Stange 3 ist im Punkt A am Rad 1 drehbar befestigt und liegt im Punkt C in einer drehbaren Schiebehülse, deren Drehpunkt fest mit dem Rad 2 verbunden ist.

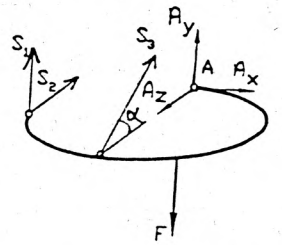
a) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeiten ω_2 von Rad 2 und ω_{AC} der Stange 3 in der dargestellten Lage.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten x_M, y_M des Momentanpols der Stange 3 in der gezeichneten Lage.

Gegeben: ω_1, R.

Hinweis: Lösung rechnerisch oder zeichnerisch.

Lösung zur Aufgabe 1:



Für den Winkel α zwischen dem Stab S_3 und der x,z-Ebene gilt

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\sum F_{ix} = 0 = A_x, \tag{1}$$

$$\sum F_{iy} = 0 = A_y + S_1 + S_3 \sin\alpha - F, \tag{2}$$

$$\sum F_{iz} = 0 = A_z - S_2 - S_3\cos\alpha, \tag{3}$$

$$\sum M_{iAx} = 0 = FR(1-\cos\varphi) - S_1 R - S_3 \sin\alpha 2R, \tag{4}$$

$$\sum M_{iAy} = 0 = -S_2 R, \tag{5}$$

$$\sum M_{iAz} = 0 = -FR\sin\varphi - S_1 R. \tag{6}$$

Aus (1), (5) und (6) :

$$A_x = 0, \qquad S_2 = 0, \qquad S_1 = -F\sin\varphi.$$

Eingesetzt in (4) :

$$S_3 = \frac{\sqrt{5}}{2}F(1+\sin\varphi-\cos\varphi).$$

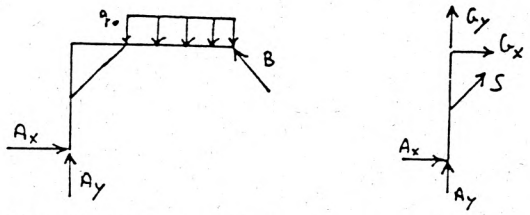
Eingesetzt in (3) :

$$A_z = F(1+\sin\varphi-\cos\varphi).$$

Eingesetzt in (2) :

$$A_y = \frac{F}{2}(1+\sin\varphi+\cos\varphi).$$

Lösung zur Aufgabe 2:



a) Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem :

$$\sum F_{ix} = 0 = A_x - B\frac{1}{2}\sqrt{2} \tag{1}$$

$$\sum F_{iy} = 0 = A_y + \frac{1}{2}\sqrt{2}B - 2q_0 a \tag{2}$$

$$\sum M_{iA} = 0 = -2aq_0 2a + 3aB\frac{1}{2}\sqrt{2} + 2aB\frac{1}{2}\sqrt{2} \tag{3}$$

Daraus die Lagerreaktionen :

$$B = \frac{4}{5}\sqrt{2}q_0 a, \qquad A_y = \frac{6}{5}q_0 a, \qquad A_x = \frac{4}{5}q_0 a.$$

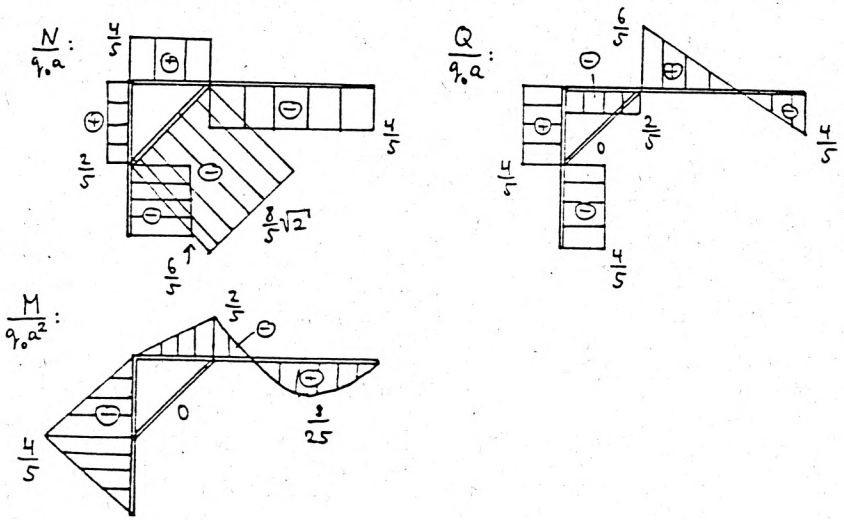
Momentenbilanz um G

$$\sum M_{iG} = 0 = 2aA_x + a\frac{1}{\sqrt{2}}S \tag{4}$$

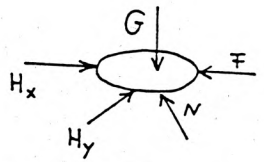
ergibt

$$S = -\frac{8}{5}\sqrt{2}q_0 a.$$

b) Schnittgrößenverläufe



Lösung zur Aufgabe 3:



a) Gleichgewichtsbedingungen :

$$\sum F_{ix} = 0 = F - H_x, \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0 = G\sin\alpha - H_y, \quad (2)$$

$$\sum F_{iz} = 0 = N - G\cos\alpha, \quad (3)$$

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} \leq \mu_0 N. \quad (4)$$

Aus (1), (2) und (3) :

$$H_x = F,$$

$$H_y = G\sin\alpha = \frac{G}{2},$$

$$N = G\cos\alpha = G\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Und damit

$$\sqrt{F^2 + \frac{G^2}{4}} \leq \sqrt{\frac{2}{3}}G\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$F^2 \leq \frac{G^2}{4},$$

$$F \leq \frac{G}{2} = 50N.$$

b) Für der Winkel zwischen den Wirkungslinien gilt

$$\tan\beta = \frac{H_y}{H_x} = \frac{\frac{G}{2}}{F} = \frac{\frac{G}{2}}{\frac{G}{2}} = 1$$

oder

$$\beta = \frac{\pi}{4} = 45^0.$$

Lösung zur Aufgabe 4:

Berechnung der Hauptnormalspannungen :

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \quad (1)$$

Gleichung (1) führt auf

$$\sigma_{1,2} = 20\frac{N}{mm^2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{10000}\frac{N}{mm^2},$$

$$\sigma_1 = 70\frac{N}{mm^2},$$

$$\sigma_2 = -30\frac{N}{mm^2}.$$

Spannungs-Dehnungsbeziehungen :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2), \quad (2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1). \quad (3)$$

Daraus

$$E = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\varepsilon_1\sigma_1 - \varepsilon_2\sigma_2}$$

$$\nu = \frac{\varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_1\sigma_2}{\varepsilon_2\sigma_2 - \varepsilon_1\sigma_1}$$

$$E = \frac{4000}{0,03}\frac{N}{mm^2} = \frac{400000}{3}\frac{N}{mm^2}$$

$$\nu = \frac{-0,01}{-0,03} = \frac{1}{3}.$$

Lösung zur Aufgabe 5:

a) Aus Freischnitt folgt

$$S_1 = F, \qquad S_2 = 0, \qquad S_3 = -2F$$

und damit

$$a = \Delta\ell_1 = \frac{N_1}{EA_1}\ell_1 = \frac{F_a\ell}{EA_1} \tag{1}$$

$$F_a = a\frac{EA_1}{\ell} \tag{2}$$

b) Lösung über Energien:

$$W = 2\int_0^\ell \frac{F^2x^2}{2EI}dx + \frac{S_1^2\ell}{2EA_1} + \frac{S_2^2\ell\sqrt{2}}{2EA_2} + \frac{S_3^2\ell}{2EA_2}$$

$$W = \frac{1}{3}\frac{F^2\ell^3}{EI} + \frac{F^2\ell}{2EA_1} + \frac{4F^2\ell}{2EA_2}$$

$$f = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{2}{3}\frac{F\ell^3}{EI} + \frac{F\ell}{EA_1} + 4\frac{F\ell}{EA_2}$$

$$f = \frac{2}{3}\frac{F\ell^3}{EI} + F\ell\left(\frac{1}{EA_1} + \frac{4}{EA_2}\right).$$

oder über Biegelinientafel und Überlagerung

$$f = w_1 + w_2 + w_{s1} + w_{s3} \tag{3}$$

mit w_1 = Absenkung infolge Biegung des Kragarms
w_2 = Absenkung infolge Biegung des ersten Feldes
w_{s1} = Absenkung infolge Verlängerung von Stab 1
w_{s3} = Absenkung infolge Verkürzung von Stab 3

$$w_1 = \frac{F\ell^3}{3EI}, \quad w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}, \quad w_{s1} = \frac{F\ell}{EA_1}, \quad w_{s3} = \frac{2F\ell}{EA_2}2,$$

und damit

$$f = \frac{2}{3}\frac{F\ell^3}{EI} + F\ell\left(\frac{1}{EA_1} + \frac{4}{EA_2}\right). \tag{4}$$

c) Bei Begrenzung der Verlängerung von Stab 1 gilt

$$f_a = w_1 + w_2 + w_{s3} + a \tag{5}$$

und somit

$$f_a = \frac{2}{3}\frac{F\ell^3}{EI} + \frac{4F\ell}{EA_2} + a. \tag{6}$$

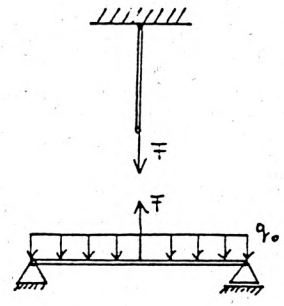
Lösung zur Aufgabe 6:

a) Temperaturänderung

$$\Delta_\ell = \alpha_T\Delta T\frac{\ell}{2}$$

$$\Delta T = \frac{2\Delta\ell}{\alpha_T\ell} \tag{1}$$

b) Nach Belastung und Abkühlung seien w_1 die Verlängerung des Stabes, $w_2 = w_q + w_F$ die Absenkung der Mitte des Balkens aus Biegelinientafel:



$$w_1 = \frac{F\ell}{2EA}, \quad w_q = \frac{5}{384}\frac{q_0\ell^4}{EI}, \quad w_F = -\frac{F\ell^3}{48EI}. \tag{2}$$

Jetzt gilt

$$w_1 - w_2 = \Delta\ell \tag{3}$$

oder eingesetzt

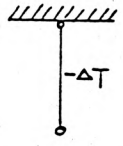
$$F = \frac{\Delta\ell + \frac{5q_0\ell^4}{384EI}}{\frac{\ell}{2EA} + \frac{\ell^3}{48EI}} \tag{4}$$

Für das Biegemoment folgt

$$M\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{q_0\ell}{2}\frac{\ell}{2} - \frac{q_0\ell}{2}\frac{\ell}{4} - \frac{F}{2}\frac{\ell}{2} = \frac{q_0\ell^2}{8} - \frac{F\ell}{4}. \tag{5}$$

Alternativer Lösungsweg:

Hauptsystem:

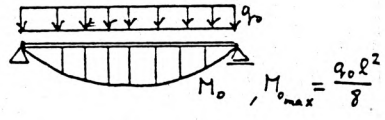


$$EI\delta_{10} = 2\frac{5}{12}\frac{\ell}{4}\frac{q_0\ell^2}{8}\frac{\ell}{2} + EI\alpha_T\Delta T\frac{\ell}{2}$$

$$EI\delta_{10} = \frac{5}{384}q_0\ell^4 + EI\Delta\ell$$

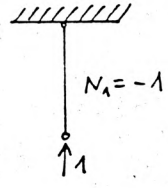
$$EI\delta_{11} = \frac{1}{3}2\frac{\ell^2}{16}\frac{\ell}{2} + \frac{EI}{EA}\frac{\ell}{2}\cdot 1$$

$$EI\delta_{11} = \frac{\ell^3}{48} + \frac{EI}{EA}\frac{\ell}{2}$$



und damit

Einssystem:

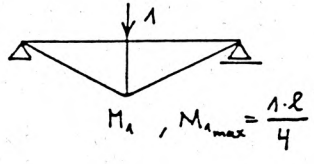


$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{5}{384}q_0\ell + \frac{EI\Delta\ell}{\ell^3}}{\frac{1}{48} + \frac{EI}{2EA\ell^2}}$$

Stabkraft F und Biegemoment M:

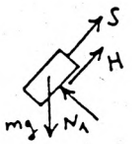
$$F = N = N_1X_1 = \frac{\frac{5}{384}q_0\ell + \frac{EI\Delta\ell}{\ell^3}}{\frac{1}{48} + \frac{EI}{2EA\ell^2}}$$

$$M = M_0 + X_1M_1 = \frac{q_0\ell^2}{8} - \frac{\frac{5}{384}q_0\ell + \frac{EI\Delta\ell}{\ell^3}}{\frac{1}{48} + \frac{EI}{2EA\ell^2}}\frac{\ell}{4}$$



Lösung zur Aufgabe 7:

a) Quader 1:



Quader 2:

Aus Freikörperbilder: Quader 1: $N_1 - mg\cos 45^\circ = 0,$

$H + S - mg\sin 45^\circ = 0,$

Quader 2: $S - mg\sin\alpha = 0,$

wobei H positiv oder negativ sein kann. Daraus

$$|H| = |mg\sin 45^\circ - mg\sin\alpha|.$$

Ruhe für $\alpha < 45^\circ$ und

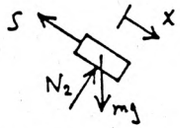
$$\begin{aligned} |H| &= mg\sin 45^\circ - mg\sin\alpha \le \mu mg\cos 45^\circ, \\ \sin\alpha &\ge \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{\mu}{2}\sqrt{2}, \\ \alpha &\ge arcsin[\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\mu)] = \alpha_1 \end{aligned}$$

oder $\alpha > 45^\circ$ und

$$\begin{aligned} |H| &= mg\sin\alpha - mg\sin 45^\circ \le \mu mg\cos 45^\circ, \\ \sin\alpha &\le \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{\mu}{2}\sqrt{2}, \\ \alpha &\le arcsin[\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\mu)] = \alpha_2. \end{aligned}$$

Haften somit für $arcsin[\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\mu)] \le \alpha \le arcsin[\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\mu)].$

b) Bei Bewegung (Richtung von R unter Berücksichtigung von $\dot{x} < 0$):



Quader 1: $m\ddot{x} = S + R - mg\sin 45^\circ,$ $\quad R = \mu mg\cos 45^\circ,$

Quader 2: $m\ddot{x} = -S + mg\sin\alpha.$

Damit Beschleunigung und Seilkraft:

$$\ddot{x} = \frac{g}{2}(\sin\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\mu)) = \frac{g}{2}(\sin\alpha - \sin\alpha_1), \qquad S = \frac{mg}{2}(\sin\alpha + \sin\alpha_1).$$

c) Lösung mit Hilfe des Arbeitssatzes: $T_1 + U_1 + W_{12} = T_2 + U_2.$

Nullniveau der potentiellen Energie so, daß $U_1 = 0$:

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 2\frac{m}{2}\dot{x}^2, \quad W_{12} = -|R|\ell = -mg\frac{1}{2}\sqrt{2}\mu\ell, \quad U_2 = -mg\frac{1}{2}\sqrt{2}\ell + mg\ell\sin\alpha.$$

Dies liefert nach Einsetzen

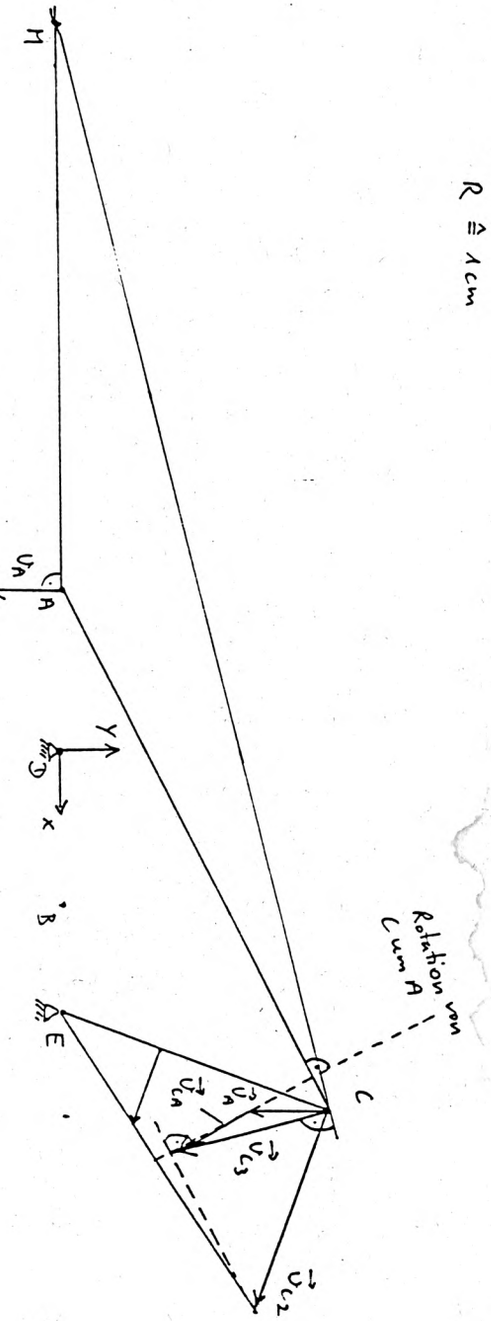
$$|\dot{x}| = \sqrt{g\ell(\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\mu) - \sin\alpha)} = \sqrt{g\ell(\sin\alpha_1 - \sin\alpha)}.$$

Lösung zur Aufgabe 8:

zeichnerische Lösung

Maßstab: $R\omega_1 \hat{=} 5\,mm$

$R \hat{=} 1\,cm$



a) $\omega_2 = -\frac{3}{2}\omega_1$ aus Radienverhältnis

b) Rotationsanteil von C um A mit 35 $R\omega_1$ abgelesen

$|\omega_3| = \frac{35\,\omega_1 R}{11\sqrt{3}R} = 0{,}3\,\omega_1$

c) Momentanpol: $\perp$ zu $\vec{v}_A$, $\perp$ zu $\vec{\omega}_3$ schneiden

$\vec{r}_{AM} = \begin{pmatrix} -13\,R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung zur Aufgabe 8:

a) Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit ω_2

$$\vec{v}_{B1} = \vec{v}_{B2} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_D + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{DB} = \vec{v}_E + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{EB}, \tag{1}$$

woraus mit $\vec{v}_D = \vec{v}_E = \vec{0}$ folgt

$$\omega_1 3R = -\omega_2 2R \quad \Longrightarrow \quad \omega_2 = -\frac{3}{2}\omega_1. \tag{2}$$

Bei der Stange müssen im Punkt C die Normalkomponenten von $\vec{v}_{C2}$ und $\vec{v}_{C3}$ bezüglich der Stange gleich sein:

$$\vec{v}_{C2} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{C3} \cdot \vec{n}. \qquad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

$$\vec{v}_{C2} = \vec{v}_E + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{EC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2}\omega_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2R \\ 5R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} R\omega_1. \tag{4}$$

$$\vec{v}_{C3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3R\omega_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10R \\ 5R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5R\omega_3 \\ -3R\omega_1 + 10R\omega_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Nach Einsetzen in (3) folgt die skalare Gleichung

$$(\frac{15}{2} + 6)\omega_1 R = -5R\omega_3 + 6R\omega_1 - 20R\omega_3 \quad \Longrightarrow \quad \omega_3 = -\frac{3}{10}\omega_1. \tag{6}$$

b) Bestimmung des Momentanpols. Für diesen gilt

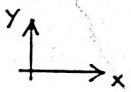
$$\vec{v}_M = \vec{0}, \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_{D3} + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_M = \vec{v}_{A3} + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{AD} + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_M = \vec{0}. \tag{7}$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ -3R\omega_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{10}\omega_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3R + r_{Mx} \\ r_{My} \\ 0 \end{pmatrix} &= \vec{0}, \\
\frac{3}{10}\omega_1 r_{My} &= 0, \\
-3R\omega_1 - (3R + r_{Mx})\frac{3}{10}\omega_1 &= 0. \\
\vec{r}_M &= \begin{pmatrix} -13R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Lösung zur Aufgabe 9:

a) Da keine horizontalen Kräfte und keine Momente bezüglich des Schwerpunktes wirken, gilt



$$\dot{x}_S^- = 0, \qquad \omega^- = 0.$$

Energiesatz :

$$T_0 + U_0 = T_1 + U_1 \tag{1}$$

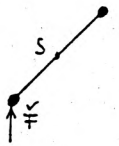
mit

$$T_0 = 0, \quad U_0 = 2mg(2 + \frac{\sqrt{2}}{4})\ell, \quad T_1 = \frac{2m}{2}(\dot{y}_S^-)^2, \quad U_1 = 2mg\frac{\sqrt{2}}{4}\ell.$$

Nach Einsetzen (mit Vorzeichen aus Richtung):

$$\dot{y}_S^- = -2\sqrt{g\ell}. \tag{2}$$

b) Geschwindigkeiten nach dem Stoß:



Aus Freikörperbild:

$$\begin{aligned}
2m(\dot{x}_S^+ - \dot{x}_S^-) &= 0, && (3)\\
2m(\dot{y}_S^+ - \dot{y}_S^-) &= \dot{F}, && (4)\\
\Theta(\omega^+ - \omega^-) &= \dot{F}\frac{\sqrt{2}}{4}\ell, && (5)
\end{aligned}$$

mit Massenträgheitsmoment

$$\Theta = \frac{1}{2}m\ell^2. \tag{6}$$

Energieerhaltung:

$$\frac{2m}{2}(\dot{x}_S^-)^2 + \frac{2m}{2}(\dot{y}_S^-)^2 + \frac{\Theta}{2}(\omega^-)^2 = \frac{2m}{2}(\dot{x}_S^+)^2 + \frac{2m}{2}(\dot{y}_S^+)^2 + \frac{\Theta}{2}(\omega^+)^2. \tag{7}$$

Daraus folgt $\dot{x}_S^+ = 0$ und

$$\begin{aligned}
\dot{F} &= \sqrt{2}m\ell\omega^+ \\
2(\dot{y}_S^+ - \dot{y}_S^-) &= \sqrt{2}\ell\omega^+ \quad \Longrightarrow \quad \omega^+ = \tfrac{\sqrt{2}}{\ell}(\dot{y}_S^+ - \dot{y}_S^-) \\
2m[(\dot{y}_S^+)^2 - (\dot{y}_S^-)^2] &= -\tfrac{1}{2}m\ell^2(\omega^+)^2 \quad \Longrightarrow \quad (\omega^+)^2 = -\tfrac{4}{\ell^2}(\dot{y}_S^+ + \dot{y}_S^-)(\dot{y}_S^+ - \dot{y}_S^-) \\
&\Longrightarrow \tfrac{2}{\ell^2}(\dot{y}_S^+ - \dot{y}_S^-) = -\tfrac{4}{\ell^2}(\dot{y}_S^+ + \dot{y}_S^-)
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\dot{y}_S^+ &= -\frac{1}{3}\dot{y}_S^- = \frac{2}{3}\sqrt{g\ell} && (8)\\
\omega^+ &= \frac{\sqrt{2}}{\ell}(-\frac{4}{3}\dot{y}_S^-) = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2g}{\ell}}. && (9)
\end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 10 (BI):

Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = const, \qquad (1)$$

$$v_1^2 = 2ga,$$

$$v_2^2 = 2g(b-h),$$

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + y_0, \qquad (2)$$

$$t^* = \sqrt{\frac{2}{g}(y_0 - y)}, \qquad y_{01} = b - a, \qquad y_{02} = h, \qquad y = 0,$$

$$x_1 = v_1 t^* = 2\sqrt{a(b-a)},$$

$$x_2 = v_2 t^* = 2\sqrt{h(b-h)}.$$

Es wird $x_1 = x_2$ gefordert:

$$a(b-a) = h(b-h),$$

$$h_1 = b - a,$$

$$h_2 = a.$$

Bei der Lösung h_1 haben Strahl 1 und Strahl 2 die gleiche Austrittshöhe.

Alternativlösung:

Toricelli:

$$v = \sqrt{2gh^*} \qquad (3)$$

Wurf:

$$x_w = v\sqrt{2\frac{H^*}{g}} \qquad (4)$$

Eingesetzt:

$$\sqrt{2ga}\sqrt{2\frac{b-a}{g}} = \sqrt{2g(b-h)}\sqrt{2\frac{h}{g}}$$

und somit

$$h_1 = b - a, \qquad h_2 = a.$$

TECHNISCHE HOCHSCHULE DARMSTADT

DIPLOMVORPRÜFUNG IN TECHNISCHER MECHANIK

AM 14. SEPTEMBER 1992

(Name) (Vorname) (Matr.-Nr.) (FB)

Die Aufgaben sind nicht nach ihrem Schwierigkeitsgrad geordnet. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und numerieren Sie die Blätter. Der Lösungsweg soll klar erkennbar sein, die Ergebnisse müssen deutlich hervorgehoben werden.

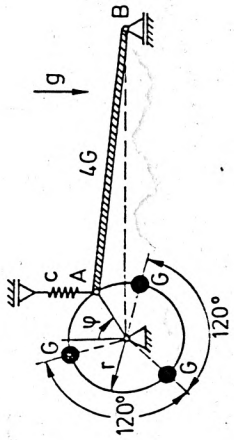
Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines DIN A4 - Blattes, sowie die drei Hilfsblätter zur TM II (Biegelinientafel, Koppeltafel und Hilfsblatt zur Torsion) zu benutzen.

Aufgabe 1: (MB, WI/MB, BI)

Auf einer drehbar gelagerten, homogenen Kreisscheibe (Radius r) sind drei Punktmassen (jeweils Gewicht G) wie skizziert befestigt. Die Kreisscheibe ist im Punkt A durch eine Feder (Federsteifigkeit c) elastisch gelagert und gelenkig mit einer homogenen Stange (Gewicht $4G$) verbunden. Die Stange kann sich im Punkt B nur in horizontaler Richtung verschieben; die Feder ist für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ entspannt.

Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen des Systems und deren Stabilität.

Gegeben: G, r, c

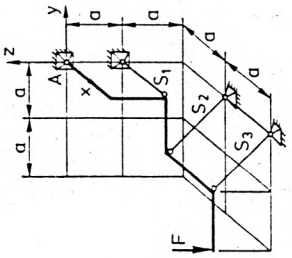


Das dargestellte räumliche Tragwerk besteht aus einem mehrfach abgewinkelten Rahmen, der im Punkt A unverschieblich aber frei drehbar gelagert ist, sowie aus den drei Stäben S_1, S_2 und S_3.

Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in A und die drei Stabkräfte S_1, S_2 und S_3.

Gegeben: F, a

Aufgabe 2: (MB, WI/MB, BI)



Ein Stab (1) wird in eine keilförmige Öffnung eingeführt und dort mit zwei losen Keilen (2) fixiert. Die Berührungsflächen des Stabes (1) und der Keile (2) sind rauh (Haftungskoeffizient μ_1). Durch das Aufbringen der Kraft F werden die Keile nach rechts gezogen und der Stab eingeklemmt.

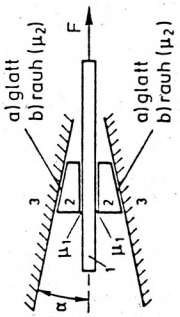
Wie groß darf der Winkel α gewählt werden, damit der Stab nicht rutscht,

a) wenn die Berührungsflächen der Keile (2) und der Wand (3) rauh sind (Haftungskoeffizient μ_1)?

b) wenn die Berührungsflächen der Keile (2) und der Wand (3) rauh sind (Haftungskoeffizient $\mu_2 > \mu_1$)?
Hinweis:
Betrachten Sie den geeigneten Haftgrenzfall!

Gegeben: μ_1, μ_2

Aufgabe 3: (MB, WI/MB, BI)



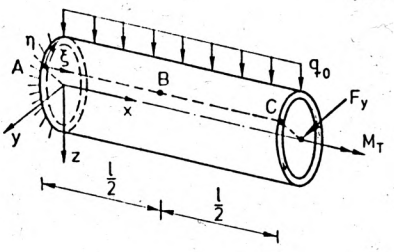
Aufgabe 4: (MB, WI/MB, BI)

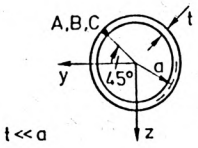
Ein dünnwandiges, einseitig eingespanntes Kreisrohr (Elastizitätsmodul E, Schubmodul G, Radius a, Wandstärke t) wird durch sein Eigengewicht q_0, eine horizontale Kraft F_y und ein Torsionsmoment M_T belastet. In den Punkten A,B und C werden die Verzerrungen ε_ξ^A, ε_ξ^B und $\gamma_{\xi\eta}^C$ gemessen.

Schließen Sie aus den bekannten Verzerrungen auf die Größen q_0, F_y und M_T.

Gegeben: $\varepsilon_\xi^A, \varepsilon_\xi^B, \gamma_{\xi\eta}^C, E, G, a, l, t, I_y = I_z = I$

Hinweis:
Die Schubspannungen infolge der auftretenden Querkräfte können vernachlässigt werden.



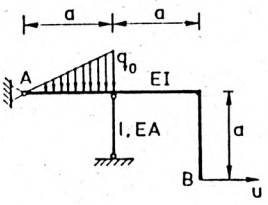


Aufgabe 5: (MB, WI/MB, BI)

Das dargestellte Tragwerk besteht aus einem Rahmen (Biegesteifigkeit EI) und einem Stab (Länge l, Dehnsteifigkeit EA). Es wird durch eine dreieckförmige Streckenlast belastet.

Berechnen Sie die Horizontalverschiebung u des Punktes B.

Gegeben: EI, EA, a, l, q_0

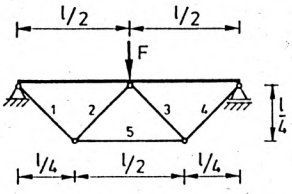


Aufgabe 6: (MB, WI/MB, BI)

Das dargestellte Tragwerk besteht aus einem Balken der Biegesteifigkeit EI und fünf Stäben der Dehnsteifigkeit EA. Durch einen Unfall wird einer der fünf Stäbe zerstört.

Welche zusätzliche Absenkung stellt sich hierdurch am Lastangriffspunkt ein?

Gegeben: $EI, EA = 24\frac{EI}{l^2}, l, F$



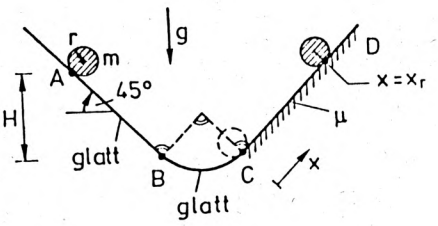
Aufgabe 7: (MB, WI/MB, BI)

Eine glatte schiefe Ebene AB ist durch eine glatte Viertelkreisbahn BC mit einer rauhen schiefen Ebene CD (Reibungskoeffizient μ) verbunden. Eine homogene, zylindrische Walze (Radius r, Masse m) wird an der Stelle A aus der Ruhelage losgelassen.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_C des Walzenmittelpunktes im Punkt C.

b) Nach welcher Strecke x_r kommt die Walze vom Rutschen ins Rollen?

Gegeben: H, r, μ, m, g



Aufgabe 8: (MB, WI/MB, BI)

Auf einem Lkw ist eine Punktmasse m elastisch befestigt (modelliert durch zwei Federn der Steifigkeit c). Sie gleitet auf einer reibungsfreien Unterlage. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Masse in der Ruhelage $y = 0$. Die Koordinate y wird von der Mitte der Ladefläche aus gezählt. Die Federn sind in dieser Lage entspannt. Die Geschwindigkeit des Lkw's ändert sich gemäß folgender Funktion

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ v_0 \sin \Omega t & 0 \le t \le \frac{\pi}{2\Omega}, \\ v_0 & t > \frac{\pi}{2\Omega} \end{cases}$$

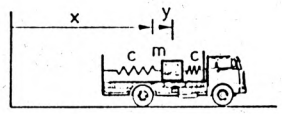
mit $\Omega = \sqrt{\frac{2c}{m}}$.

a) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Masse m zum Zeitpunkt $t = \frac{\pi}{2\Omega}$.

Gegeben: v_0, c, m

Hinweis:
Der Ansatz $z = \frac{a}{2} bt \sin bt$ erfüllt die Differentialgleichung $\ddot{z} + b^2 z = b^2 a \cos bt$.



Aufgabe 9: (MB, WI/MB, BI)

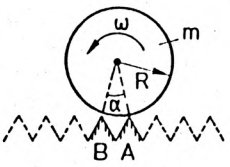
Eine homogene Walze (Masse m, Radius R) wird über einen Knüppeldamm bewegt. Dabei rollt die Walze jeweils über eine Spitze A und stößt ideal plastisch gegen die nächste Spitze B. Die Winkelgeschwindigkeit unmittelbar vor dem Stoß sei ω.

a) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$ der Walze unmittelbar nach dem Stoß?

b) Wie groß ist der Energieverlust ΔE beim Stoß?

c) Welche Antriebsleistung N ist erforderlich, wenn die Winkelgeschwindigkeit vor dem Stoß immer ω betragen soll und zwischen den Stößen eine konstante Winkelgeschwindigkeit angenommen werden kann?

Gegeben: α, R, m, ω



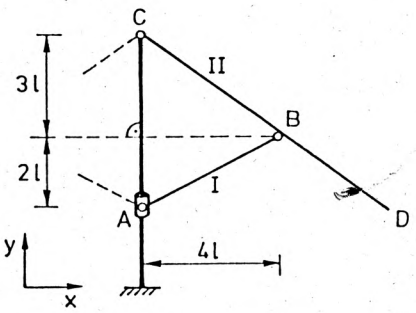
Aufgabe 10: (MB, WI/MB)

Um den skizzierten Sonnenschirm aufzuspannen, wird die Schiebehülse A mit der konstanten Geschwindigkeit v_A nach oben bewegt. Die Stange $\overline{CD}$ dreht sich um den festen Punkt C.

a) Ermitteln Sie für die gezeichnete Lage die Größe und Richtung der Geschwindigkeit v_B des Punktes B.

b) Wie groß ist die Winkelbeschleunigung der Stange $\overline{CD}$?

Gegeben: v_A, l



Aufgabe 10: (BI)

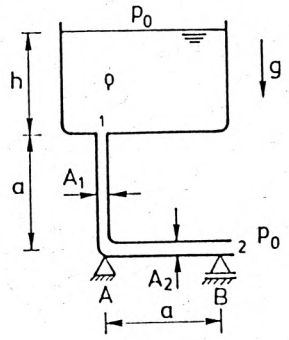
Aus einem Behälter soll Wasser reibungsfrei durch ein L-förmiges Rohr ausströmen. Das Ende des Rohres ist durch ein Ventil verschlossen. Die Querschnittsfläche des Behälters sei groß im Vergleich zu der des Rohres, die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Behälter sei zu vernachlässigen. Bestimmen Sie

a) die Geschwindigkeit des Wassers an den Stellen 1 und 2 nach Öffnen des Ventils,

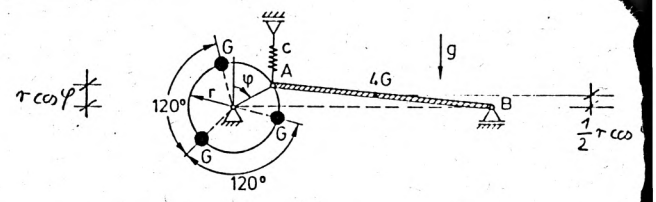
b) die Druckverteilung im Behälter und im Rohr nach Öffnen des Ventils (Skizze mit ausgezeichneten Werten),

c) die Horizontalkraft im Lager A nach Öffnen des Ventils.

Gegeben: $a, h, A_1, A_2, \rho, g, p_0$



1. Aufgabe



Der Potentialanteil der Punktmassen braucht nicht berücksichtigt zu werden, da die Lage ihres Schwerpunktes unabhängig von dem Winkel φ ist. Die drei Punktmassen bilden somit eine Gleichgewichtsgruppe und beeinflussen nicht die Stabilität des Systems.

Potential: $\Pi = \frac{1}{2} c r^2 \cos^2\varphi + 2Gr\cos\varphi$

1. Abl.: $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -cr^2\cos\varphi\sin\varphi - 2Gr\sin\varphi$
$= -cr^2\left(\cos\varphi + \frac{2G}{cr}\right)\sin\varphi$

2. Abl.: $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = cr^2(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) - 2Gr\cos\varphi$

Bedingung für Gleichgewicht:
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -cr^2\left(\cos\varphi + \frac{2G}{cr}\right)\sin\varphi = 0$$

1.) $\sin\varphi = 0 \longrightarrow \underline{\underline{\varphi_1 = 0}} \quad \underline{\underline{\varphi_2 = \pi}}$

2.) $\cos\varphi = -\frac{2G}{cr} \longrightarrow \underline{\underline{\varphi_3 = \arccos\left(-\frac{2G}{cr}\right)}} \quad \underline{\underline{\varphi_4 = -\varphi_3}}$

Die Gleichgewichtslagen φ_3 und φ_4 existieren nur für $2G \leq cr$.

Sonderfall: $2G = cr \longrightarrow \varphi_3 = \pi = \varphi_2$
$\longrightarrow \varphi_4 = -\pi$

Stabilität:

Lage φ_1: $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -cr^2 - 2Gr < 0$ instabil

Lage φ_2:
$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -cr^2 + 2Gr \begin{cases} > 0 & \text{für } 2G > cr \quad \underline{\text{stabil}} \\ = 0 & \text{für } 2G = cr \\ < 0 & \text{für } 2G < cr \quad \underline{\text{instabil}} \end{cases}$$

Für $2G = cr$ müssen höhere Ableitungen untersucht werden.

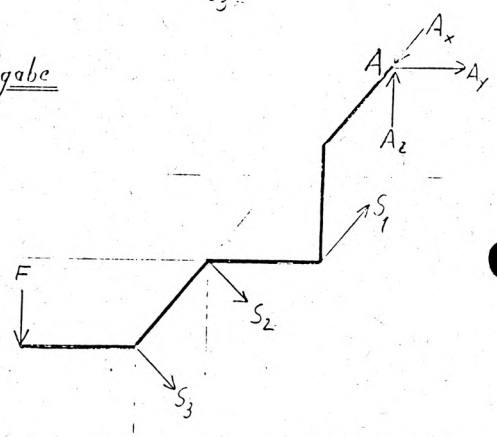
Lage φ_3:
$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = cr^2\left(\sin^2\varphi_3 - \frac{4G^2}{c^2r^2}\right) + 2Gr\cdot\frac{2G}{cr} > 0 \quad \underline{\text{stabil}} \text{ für } 2G<cr$$

Lage φ_4:
$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = cr^2\left(\sin^2\varphi_4 - \frac{4G^2}{cr^2}\right) + 2Gr\cdot\frac{2G}{cr} > 0 \quad \underline{\text{stabil}} \text{ für } 2G<cr$$

3. Abl.: $\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \varphi^3} = cr^2\, 4\sin\varphi\cos\varphi + 2Gr\sin\varphi$
$= 0 \quad$ für $\varphi_3 = -\varphi_4 = \pi \; (2G = cr)$

4. Abl.: $\frac{\partial^4 \Pi}{\partial \varphi^4} = 4cr^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2Gr\cos\varphi$
$> 0 \quad$ für $\varphi_3 = -\varphi_4 = \pi \; (2G = cr)$
$\underline{\underline{\text{stabil}}}$

2. Aufgabe



6 Gleichgewichtsbedingungen für 6 Unbekannte:

$\Sigma F_x = 0 \;:\; S_1 - A_x = 0 \qquad (1)$

$\Sigma F_y = 0 \;:\; (S_2 + S_3)\frac{\sqrt{2}}{2} + A_y = 0 \qquad (2)$

$\Sigma F_z = 0 \;:\; -(S_2 + S_3)\frac{\sqrt{2}}{2} + A_z = F \qquad (3)$

$\Sigma M_{ix}^{(A)} = 0 \;:\; (S_2 + S_3)\sqrt{2}\,a = -F\cdot 2a \qquad (4)$

$\Sigma M_{iy}^{(A)} = 0 \;:\; S_1\cdot a + (S_2 + 2S_3)\frac{\sqrt{2}}{2}a = -F\cdot 2a \qquad (5)$

$\Sigma M_{iz}^{(A)} = 0 \;:\; S_2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a + S_3\cdot\sqrt{2}\,a = 0 \qquad (6)$

aus (6): $S_2 = -2S_3 \longrightarrow$ aus (4): $\underline{\underline{S_3 = \sqrt{2}F}}$

$\longrightarrow \underline{\underline{S_2 = -2\sqrt{2}F}}$

aus (5): $\underline{\underline{S_1}} = -2F + 2F - 2F = \underline{\underline{-2F}}$

aus (1): $\underline{\underline{A_x = -2F}}$

aus (2): $\underline{\underline{A_y}} = 2F - F = \underline{\underline{F}}$

aus (3): $\underline{\underline{A_z}} = F - F = \underline{\underline{0}}$

Alternativlösung:
Die Achsen für die Momentengleichgewichtsbedingungen werden so gewählt, daß jede Gleichung nur eine Unbekannte enthält.

$\Sigma M_{I-I} = 0 \quad : \quad A_y \cdot 2a - F \cdot 2a = 0 \longrightarrow \underline{\underline{A_y = F}}$

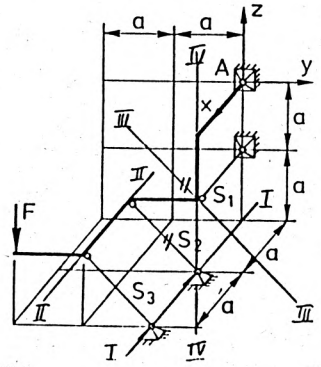
$\Sigma M_{II-II} = 0 \quad : \quad A_y \cdot a - F \cdot a - A_z \cdot a = 0 \longrightarrow \underline{\underline{A_z = 0}}$

$\Sigma M_{III-III} = 0 \quad : \quad A_y \frac{1}{2}\sqrt{2}a + A_x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}a + F \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}a = 0$
$\longrightarrow \underline{\underline{A_x = -2F}}$

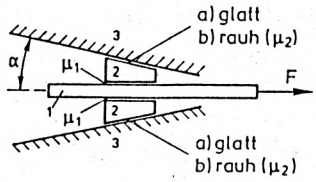
$\Sigma F_x = 0 \quad : \quad A_x - S_1 = 0 \longrightarrow \underline{\underline{S_1 = -2F}}$

$\Sigma M_{IV-IV} = 0 \quad : \quad -A_y \cdot a + S_3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}a = 0 \longrightarrow \underline{\underline{S_3 = \sqrt{2}F}}$

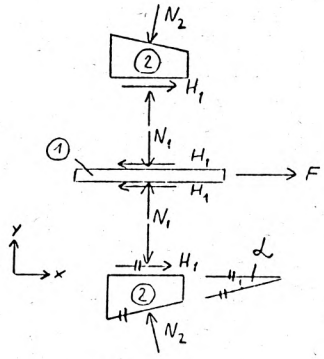
$\Sigma F_y = 0 \quad : \quad S_2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + S_3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + A_y = 0$
$\longrightarrow \underline{\underline{S_2 = -2\sqrt{2}F}}$



3. Aufgabe



a)



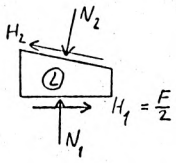
$\Sigma F_{x①} = 0 \quad : \quad H_1 = \frac{F}{2}$

$\Sigma F_{x②} = 0 \quad : \quad H_1 - N_2 \cdot \sin\alpha = 0$

$\Sigma F_{y②} = 0 \quad : \quad -N_1 + N_2 \cdot \cos\alpha = 0$

Haftbedingung: $H_1 \le \mu_1 N_1 \longrightarrow N_2 \sin\alpha \le \mu_1 N_2 \cos\alpha$
$\longrightarrow \underline{\underline{\tan\alpha \le \mu_1}}$

b)



$\Sigma F_{x②} = 0 \quad : \quad H_1 - H_2 \cos\alpha - N_2 \sin\alpha = 0 \qquad (1)$

$\Sigma F_{y②} = 0 \quad : \quad N_1 + H_2 \sin\alpha - N_2 \cos\alpha = 0 \qquad (2)$

Haftbedingungen: $H_1 \le \mu_1 N_1 \qquad (3)$
$H_2 \le \mu_2 N_2$

Der ungünstigste Fall tritt ein, wenn in der Fuge ②-③ Grenzhaftung erreicht wird: $H_2 = \mu_2 N_2 \quad (4)$

aus (1) u. (2) mit (4) in (3):

$$\mu_2 N_2 \cos\alpha + N_2 \sin\alpha \le \mu_1 N_2 \cos\alpha - \mu_1\mu_2 N_2 \sin\alpha$$

$$\underline{\underline{\tan\alpha \le \frac{\mu_1 - \mu_2}{1 + \mu_1\mu_2}}}$$

Alternative:
Es wird in beiden Fugen Grenzhaftung angenommen, d.h. $\tan\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_2}{1 + \mu_1\mu_2}$.
Hier muß allerdings noch die Zusatzüberlegung gemacht werden, daß bei einer Normalkraft $N_1 > H_1/\mu_1$ der Winkel nicht so groß werden darf:

$$\underline{\underline{\tan\alpha \le \frac{\mu_1 - \mu_2}{1 + \mu_1\mu_2}}}$$

4. Aufgabe

Punkt C:

$$\gamma_{\xi\eta}^C = \frac{\tau}{G} = \frac{M_T}{GW_T} = \frac{M_T\, a}{2GI} = \frac{M_T}{2\pi a^2 t G}$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{M_T = 2\pi a^2 t G \gamma_{\xi\eta}^C = 2G\frac{I}{a}\gamma_{\xi\eta}^C}}$$

Die Streckenlast q_0 und die Einzelkraft F_y beeinflussen unter der gegebenen Voraussetzung nicht die Schubverzerrung $\gamma_{\xi\eta}^C$.

$$\sigma_\xi(x) = \frac{N(x)}{A(x)} + \frac{M_y(x)}{I_y(x)} \cdot z - \frac{M_z(x)}{I_z(x)} \cdot y = E\,\varepsilon_\xi(x)$$

Punkt A:

$N_A = 0 \qquad M_{yA} = -q_0 \frac{l^2}{2} \qquad M_{zA} = F_y \cdot l$

$y_A = -z_A = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$

$$\varepsilon_\xi^A = \left(\frac{q_0 l^2}{2} - F_y \cdot l\right)\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{EI}}_{k} \qquad (1)$$

Punkt B:

$N_B = 0 \qquad M_{yB} = -q_0 \frac{l^2}{8} \qquad M_{zB} = F_y \frac{l}{2}$

$y_B = -z_B = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$

$$\varepsilon_\xi^B = \left(\frac{q_0 l^2}{8} - F_y \frac{l}{2}\right)\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{EI}}_{k} \qquad (2)$$

$$\longrightarrow k\,\frac{q_0 l^2}{2} = 4\varepsilon_\xi^B + 2k F_y \cdot l$$

in (1):

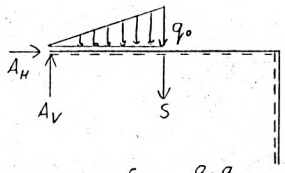
$$\varepsilon_\xi^A = (2F_y l - F_y l)k + 4\varepsilon_\xi^B$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{F_y = \sqrt{2}\frac{EI}{al}(\varepsilon_\xi^A - 4\varepsilon_\xi^B)}}$$

$$\longrightarrow q_0 = \frac{4F_y}{l} - \frac{8\varepsilon_\xi^B}{l} = \frac{4\sqrt{2}\,EI}{l}(\varepsilon_\xi^A - 2\varepsilon_\xi^B)$$

5 Aufgabe

„0" – System:

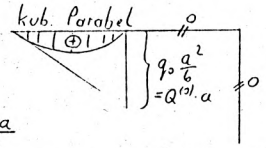


$A_H = 0$

$S \cdot a + \frac{q_0}{2} \frac{a \cdot 2a}{3} = 0 \longrightarrow S = -\frac{q_0 a}{3}$

$A_V = q_0 \cdot \frac{a}{2} - \frac{q_0 \cdot a}{3} = \frac{q_0 \cdot a}{6}$

$M^{(0)}$

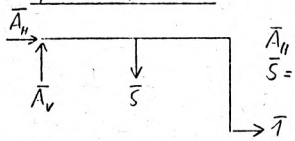


$q(x) = \frac{q_0}{a} x$

$Q^{(0)}(x) = -\frac{q_0}{2a} x^2 + \frac{q_0 a}{6}$

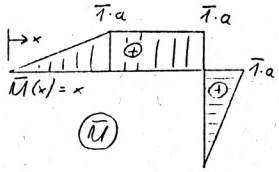
$M^{(0)}(x) = -\frac{q_0}{6a} x^3 + \frac{q_0 a}{6} x = \frac{q_0 a^2}{6}\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{x}{a}\right)\right)$

„1" – System:



$\bar{A}_H = -\bar{1}$

$\bar{S} = \bar{A}_V = \bar{1}$



$u = \int_0^a \frac{M\bar{M}}{EI} dx + \frac{S\bar{S}}{EA} l = \frac{q_0 a^2}{6EI} a^2 \int_0^1 \left[-\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] d\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{q_0 a l}{3EA}$

$= \frac{q_0 a^4}{6EI}\left[-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right] - \frac{q_0 a}{3EA} l = \frac{q_0 a^4}{45EI} - \frac{q_0 a l}{3EA}$

alternativ

Integral $\int_0^a M\bar{M}\, dx = \frac{2}{15} s i k$ (aus Koppeltafel)

$= \frac{1}{45} q_0 a^4$

$s = a$

$i = q_0 a^2 / 6$

$k = \bar{1} \cdot a$

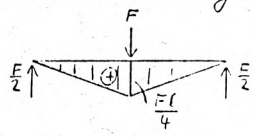
(25)

6 Aufgabe

Wenn einer der Stäbe durch einen Unfall zerstört wird, läßt sich die Durchbiegung des Lastangriffspunktes wie beim einfachen Balken auf zwei Stützen berechnen: $w_0 = \frac{F l^3}{48EI}$

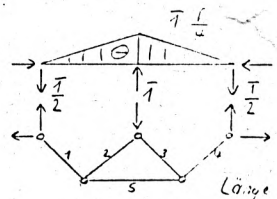
Berechnung der Zusatzabsenkung w_z

„0" – System



$S_i = 0$

„1" – System



$\bar{S}_2 = \bar{S}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \bar{1}$

$\bar{S}_5 = \bar{1}$

$\bar{S}_1 = \bar{S}_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Länge des Stäbe 1-4: $\frac{l}{4}\sqrt{2}$

" des Stabes 5: $\frac{l}{2}$

$\alpha_{11} = \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l^2}{16} + \frac{1}{EA}\left(\frac{l}{4}\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{l}{2} \cdot 1^2\right)$

$= \frac{l^3}{48EI}\left(1 + \frac{2}{l}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, l + \frac{1}{2} l\right)\right) = \frac{l^3}{48EI}(2 + \sqrt{2})$

$\alpha_{10} = -\frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{F l^2}{16} = -\frac{F l^3}{48EI}$

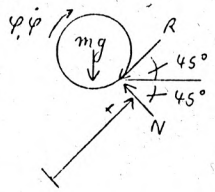
Statisch Unbestimmte $x = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{F}{2+\sqrt{2}}$

$w_z = w_0 - \frac{(F-x) l^3}{48EI} = \frac{F l^3}{(2+\sqrt{2}) 48EI}$

7. Aufgabe

a) Energiesatz $\quad mgH = \frac{1}{2} m v_c^2 \longrightarrow v_c = \sqrt{2gH}$

b) FKB



$\nwarrow$: $N = \frac{\sqrt{2}}{2} mg$ (1)

$\nearrow$: $m \cdot \ddot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2} mg - R$ (2)

$\circlearrowleft S$: $\Theta_S \cdot \ddot{\varphi} = r \cdot R$ (3)

Reibgesetz: $R = \mu \cdot N$ (4)

(1) u. (4) in (2): $m \cdot \ddot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2} mg - \frac{\sqrt{2}}{2} \mu mg$

$\longrightarrow \ddot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mu) g$

$\Theta_S = \frac{1}{2} m r^2$, (4) in (3): $\ddot{\varphi} = \frac{r \mu \cdot \sqrt{2} mg \cdot 2}{2 m r^2} = \sqrt{2} \frac{\mu g}{r}$

Integration: $\dot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mu) g t + C_1 \qquad \dot{\varphi} = \sqrt{2} \frac{\mu g}{r} t + C_3$

$x = -\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\mu) g t^2 + C_1 t + C_2$

Anfangsbdgn.: $\dot{x}(0) = v_c \longrightarrow C_1 = v_c = \sqrt{2gH}$

$x(0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0$

$\dot{\varphi}(0) = 0 \longrightarrow C_3 = 0$

Rollbedingung: $\dot{x}(t_r) = r \dot{\varphi}(t_r)$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mu) g t_r + \sqrt{2gH} = r \sqrt{2} \frac{\mu g}{r} t_r$

$t_r (1+3\mu) \frac{\sqrt{2}}{2} g = \sqrt{2gH}$

$\longrightarrow t_r = \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{g}(1+3\mu)}$

(26)

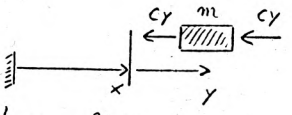
$x(t_r) = x_r = -\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\mu) g \cdot \frac{4H}{g(1+3\mu)^2} + \sqrt{2gH} \cdot \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{g}(1+3\mu)}$

$= \frac{-\sqrt{2}(1+\mu) + 2\sqrt{2}(1+3\mu)}{(1+3\mu)^2} H$

$\longrightarrow x_r = \frac{1+5\mu}{(1+3\mu)^2} \sqrt{2} H$

8. Aufgabe

a) FKB



$\rightarrow: \; m(\ddot{x}+\ddot{y}) = -2cy$

$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -\ddot{x} \quad \longrightarrow \quad \underline{\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{2c}{m}}}}$

b)

$\ddot{x}(t) = +v_0 \Omega \cos \Omega t \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2\Omega}$

$= +\frac{v_0}{\omega_0}\omega_0^2 \cos \omega_0 t$ <u>Resonanzfall</u>

<u>Lösung:</u> $y = y_{hom} + y_{part}$

$y_{hom} = A\cos\omega_0 t + B \sin \omega_0 t$

$y_{part} = -\frac{v_0}{2\omega_0}\omega_0 t \sin \omega_0 t$

$y = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t - \frac{v_0}{2} t \sin\omega_0 t$

$\dot{y} = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cos\omega_0 t - \frac{v_0}{2}(\sin\omega_0 t + t\omega_0 \cos\omega_0 t)$

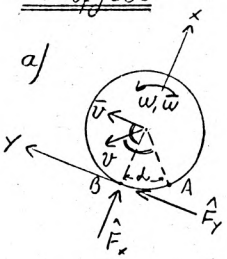
<u>Anfangsbdgn:</u> $y(0) = 0 \longrightarrow A = 0$

$\dot{y}(0) = 0 \longrightarrow B = 0$

$\underline{\underline{v_m\left(t = \frac{\pi}{2\Omega}\right)}} = \dot{x}\left(\frac{\pi}{2\Omega}\right) + \dot{y}\left(\frac{\pi}{2\Omega}\right) = v_0 - \frac{v_0}{2} = \underline{\underline{\frac{v_0}{2}}}$

9. Aufgabe

a)



<u>Kinematik:</u>

$v = \omega \cdot r \qquad (1)$

$v_x = -v \sin\alpha \qquad (2)$

$v_y = v\cos\alpha \qquad (3)$

$\bar{v}_y = r \cdot \bar{\omega} \qquad (4)$

plastischer Stoß: $\bar{v}_x = 0$

<u>Impulssatz (y-Ri.)</u>: $m(\bar{v}_y - v_y) = \hat{F}_y \qquad (5)$

<u>Drehimpulssatz</u>: $\theta_S(\bar{\omega} - \omega) = -r\hat{F}_y \qquad (6)$

(1),(3),(5) in (6), $\theta_S = \frac{1}{2}mr^2$:

$\frac{mr^2}{2}(\bar{\omega} - \omega) = -rm(r\bar{\omega} - r\omega\cos\alpha)$

$\longrightarrow \underline{\underline{\bar{\omega}}} = \frac{\cos\alpha + 1/2}{3/2}\omega = \underline{\underline{\frac{2\cos\alpha + 1}{3}\omega}}$

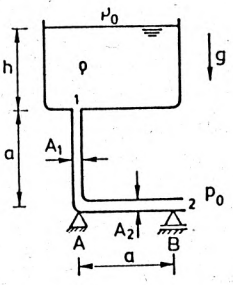
b) $\underline{\underline{\Delta E}} = E_{vor} - E_{nach} = \underbrace{\frac{1}{2}\theta_S\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2}_{\frac{1}{2}\theta_A\omega^2} \underbrace{- \frac{1}{2}\theta_S\bar{\omega}^2 - \frac{1}{2}m\bar{v}^2}_{-\frac{1}{2}\theta_A\bar{\omega}^2}$

$= \underline{\underline{\frac{3}{4}mr^2\omega^2\left(1 - \frac{(1+2\cos\alpha)^2}{9}\right)}}$

c) $N = \frac{\Delta E}{T_{AB}} \qquad T_{AB} = \frac{\alpha}{\omega}$

$\underline{\underline{N}} = \Delta E \cdot \frac{\omega}{\alpha} = \underline{\underline{\frac{3}{4}mr^2\frac{\omega^2}{\alpha}\left[1 - \frac{(1+2\cos\alpha)^2}{9}\right]}}$

10. Aufgabe (BI)



a) <u>Bernoulli ⓪-②:</u> $\rho g(h+a) + p_0 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_0$

$\longrightarrow \underline{\underline{v_2 = \sqrt{2g(h+a)}}}$

<u>Kontinuitätsgleichung:</u> $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$

$\longrightarrow \underline{\underline{v_1 = \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g(h+a)}}}$

b) <u>Bernoulli ⓪-①°:</u> $\rho g(h+a) + p_0 = \rho g a + p_1^o$

$\longrightarrow \underline{\underline{p_1^o = p_0 + \rho g h}}$

<u>Bernoulli ①°-①ᵘ:</u> $\rho g a + p_1^o = \rho g a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1^u$

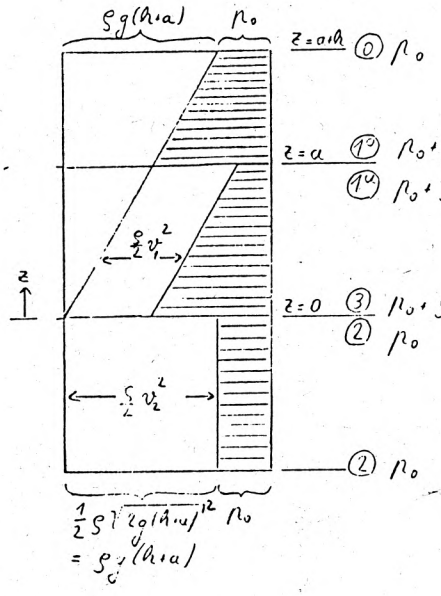
$\longrightarrow p_1^u = p_1^o - \frac{1}{2}\rho v_1^2$

$p_1^u = p_0 + \rho g h\left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right) - \rho g a \frac{A_2^2}{A_1^2}$

<u>Bernoulli ①ᵘ-③:</u> $\rho g a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1^u = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_3$

$\longrightarrow p_3 = p_1^u + \rho g a$

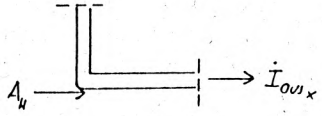
$p_3 = p_0 + \rho g(h+a)\left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)$



c) $(\underbrace{\dot{I}_{ein}}_{0} - \dot{I}_{aus})_x + A_H = 0$

$\dot{I}_{aus\,x} = \rho A_2 v_2^2 = \rho A_2 2g(h+a)$

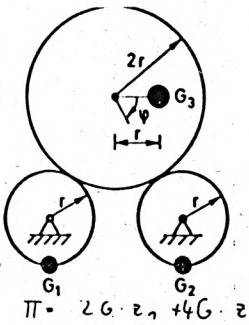
$\longrightarrow \underline{\underline{A_H = 2\rho g A_2 (h+a)}}$



Zwei Walzen (Radius r) tragen eine Walze vom Radius 2r. Zwischen den Walzen liegt Haftung vor. An den Walzen sind die Gewichte G_1 bis G_3 befestigt.
Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslagen und deren Stabilität.

Gegeben: r, $G_1 = G_2 = G$, $G_3 = 4G$

Hinweis: $\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi$



FRÜHJAHR 92

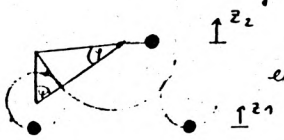
1 Aufgabe:

Pot. Energie: $\Pi = 2G \cdot z_1 + 4G \cdot z_2$

Kinematik: $2r \cdot \varphi = r \cdot \psi \rightarrow \psi = 2\varphi$

Geometrie: $z_1 = r(1 - \cos\psi)$

$z_2 = -r \sin\varphi$



eingesetzt: $\Pi = 2G \cdot r(1 - \cos 2\varphi) - 4Gr \sin\varphi$

Gleichgewicht bei $\frac{d\Pi}{d\varphi} = 0$

$\rightarrow \quad 4Gr \sin 2\varphi - 4Gr \cos\varphi = 0$

mit $\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi$

folgt: $-\cos\varphi + 2 \sin\varphi \cos\varphi = 0$

1. $\cos\varphi = 0 \rightarrow \varphi_1 = 90° ; \varphi_2 = 270°$

2. $\sin\varphi = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi_3 = 30° ; \varphi_4 = 150°$

Stabilität bei $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} > 0$ $\quad \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = 4Gr(\sin\varphi + 2\cos 2\varphi)$

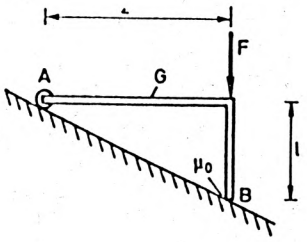
$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}\Big|_{\varphi_1} = -4G \cdot r < 0 \rightarrow$ labil $\quad \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}\Big|_{\varphi_3} = 6Gr > 0 \rightarrow$ stabil

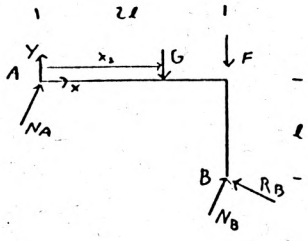
$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}\Big|_{\varphi_2} = -12Gr < 0 \rightarrow$ labil $\quad \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}\Big|_{\varphi_4} = 6Gr > 0 \rightarrow$ stabil

Aufgabe 3: (MB, WI/MB, BI)

Das dargestellte Tragwerk ist durch sein gleichmäßig über die Länge $3l$ verteiltes Eigengewicht G sowie eine Kraft F belastet. Es steht auf einer rauhen schiefen Ebene. Im Punkt A ist es reibungsfrei gelagert.
a) Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunkts des Winkels.
b) Wie groß muß der Haftungskoeffizient μ_0 sein, damit das Tragwerk nicht rutscht?

Gegeben: l, G, F





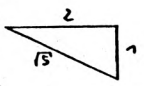
a) Schwerpunkt x_s der Resultierenden des Eigengewichts.

$x_s \cdot G = \frac{2}{3} G \cdot l + \frac{1}{3} G \cdot 2l$

$x_s = \frac{4}{3} \cdot l$

$y_s \cdot G = \frac{2}{3} G \cdot (-\frac{l}{2})$

$y_s = -\frac{1}{6} l$



) Gleichgewicht:

$\curvearrowleft$: $G \cdot \frac{4}{3} l + F \cdot 2l - N_B \cdot \sqrt{5}\, l = 0$

$\rightarrow N_B = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{4}{3} G + 2F\right)$

$\nwarrow$: $R_B - (G + F) \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$

$\rightarrow R_B = \frac{1}{\sqrt{5}} (G + F)$

Bedingung für Haftung:

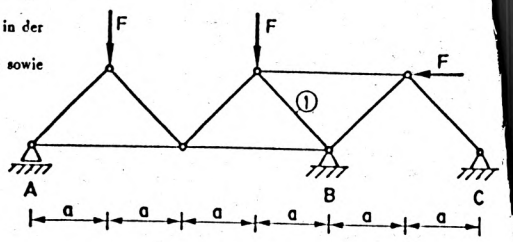
$N_B \cdot \mu_0 \geq R_B$

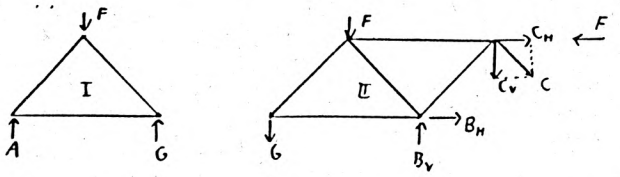
$\mu_0 \geq \frac{R_B}{N_B} \quad \rightarrow \mu_0 \geq \frac{G + F}{\frac{4}{3} G + 2F}$

Aufgabe 2: (MB, WI/) BI)

Das dargestellte Fachwerk wird in der angegebenen Weise belastet.
Bestimmen Sie die Lagerkräfte sowie die Stabkraft S_1.

Gegeben: F, a





Teilsystem I:

$\circlearrowleft$: $-A \cdot 2a + F a = 0 \quad \rightarrow A = \frac{F}{2}$

$\circlearrowright$: $G \cdot 2a - F \cdot a = 0 \quad \rightarrow G = \frac{F}{2}$

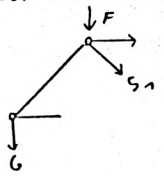
Teilsystem II:

$\circlearrowleft$: $G \cdot 2a + F \cdot a + F \cdot a - C\sqrt{2}\, a = 0 \rightarrow C = \frac{3}{2}\sqrt{2}\, F$

$\rightarrow$: $B_H + C_H - F = 0 \quad \rightarrow B_H = -\frac{1}{2} F$

$\uparrow$: $B_V - G - F - C_V = 0 \rightarrow B_V = 3F$

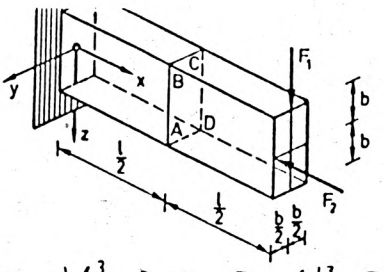
Rittenschnitt zur Berechnung von S_1:



$\uparrow$: $-G - F - \frac{1}{\sqrt{2}} S_1 = 0 \quad \rightarrow S_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{2}\, F$

Ein eingespannter Kragträger mit Rechteckquerschnitt wird durch die Kräfte F_1 und F_2 belastet.
a) Berechnen Sie im Querschnitt $x = \frac{l}{2}$ die Normalspannungen in den Punkten A, B, C und D.
b) Bestimmen Sie die Funktion $z = f(y)$ der Spannungsnullinie in diesem Querschnitt.
c) Zeichnen Sie die Spannungsnullinie in ein y,z-Koordinatensystem.

Gegeben: b, l, F_1, F_2 mit $F_1 l = 8 F_2 b$



$A = b \cdot h = 2b^2 \qquad J_y = \frac{b h^3}{12} = \frac{2}{3} b^4 \qquad J_z = \frac{h b^3}{12} = \frac{1}{6} b^4$

Schnittgrößen bei $x = \frac{l}{2}$: $\quad N = F_2 ; \; M_y = -F_1 \frac{l}{2} ; \; M_z = F_2 \frac{b}{2}$

Spannungen: $\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z - \frac{M_z}{J_z} \cdot y$

$\sigma_x = -\frac{F_2}{2b^2} - \frac{F_2 \frac{l}{2}}{\frac{2}{3} b^4} \cdot z - \frac{F_2 \frac{b}{2}}{\frac{1}{6} b^4} \cdot y$

mit $F_1 \cdot l = 8 F_2 \cdot b$: $\sigma_x = -\frac{F_2}{b^2} \left(\frac{1}{2} + 6\frac{z}{b} + 3\frac{y}{b}\right)$

$\rightarrow \sigma_{xA} = -\frac{F_2}{b^2} \left(\frac{1}{2} + 6 + \frac{3}{2}\right) = -8 \frac{F_2}{b^2}$

$\sigma_{xB} = -\frac{F_2}{b^2} \left(\frac{1}{2} - 6 + \frac{3}{2}\right) = 4 \frac{F_2}{b^2}$

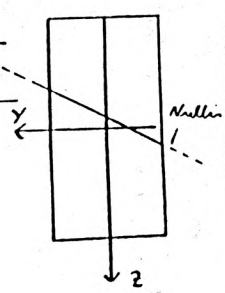
$\sigma_{xC} = -\frac{F_2}{b^2} \left(\frac{1}{2} - 6 - \frac{3}{2}\right) = 7 \frac{F_2}{b^2}$

$\sigma_{xD} = -\frac{F_2}{b^2} \left(\frac{1}{2} + 6 - \frac{3}{2}\right) = -5 \frac{F_2}{b^2}$

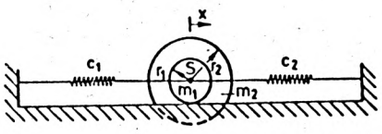
Spannungsnullinie bei $\sigma_x = 0$

$\frac{1}{2} + 6\frac{z}{b} + 3\frac{y}{b} = 0$

$\rightarrow z = -\frac{1}{12} b - \frac{1}{2} y$



Eine Walze (Masse m_2, Radius r_2) ist mit einem Zapfen (Masse m_1, Radius r_1) starr verbunden, der ohne zu gleiten auf einer horizontalen Führung rollt. Seine Schwerachse werde durch zwei Federn (Federsteifigkeiten c_1 und c_2) gehalten. Bei $x = 0$ seien die Federn entspannt.



a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung und die Eigenkreisfrequenz des Systems.

b) Geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ an.

Gegeben: $m_1 = m$, $m_2 = 4m$, $r_1 = r$, $r_2 = 2r$, c_1, c_2, v_0

Walze und Zapfen seien homogen.

a) Energiesatz:

$$\frac{1}{2}(c_1+c_2)x^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(I_1+I_2)\left(\frac{\dot{x}}{r_1}\right)^2 = \text{const.}$$

mit $I_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2$ und $I_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$ folgt:

$$(c_1+c_2)x^2 + \frac{27}{2} m \dot{x}^2 = \text{const} \rightarrow \text{Ableiten nach } t$$

$$27 m \dot{x}\ddot{x} + 2(c_1+c_2)\dot{x}x = 0 \quad \text{mit } \dot{x} \neq 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2}{27}\frac{c_1+c_2}{m} x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{27}\frac{c_1+c_2}{m}}$$

b) mit $x = A \cdot \cos(\omega_0 t + B)$

folgt mit $x(t=0) = 0 \rightarrow B = -\frac{\pi}{2}$

$\dot{x}(t=0) = v_0 \rightarrow A = \frac{v_0}{\omega_0}$

$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t$$

Bedingung für den Aufprallpunkt:

$$s_z(t^*) = 0$$

$$-\frac{1}{2} g t^{*2} + v_m \cdot \sin\alpha \cdot t^* + h = 0$$

$$t^* = \frac{-v_m \sin\alpha \pm \sqrt{v_m^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{-g}$$

$$t^* = \frac{v_m \sin\alpha}{g} \; (-)_{+} \; \frac{\sqrt{v_m^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}$$

horizontaler Weg:

$$s(t) = \hat{v}_{mx} \cdot t$$

$$s = s(t^*) = \hat{v}_{mx} \cdot t^*$$

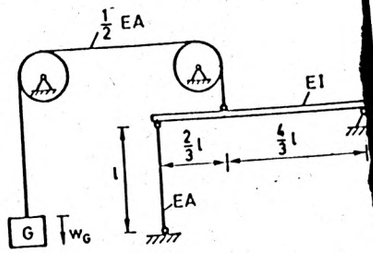
$$s = \left(-v_0 + \frac{M}{M+m} \cos\alpha \, v_m\right) \cdot t^*$$

$$s = -v_0 \cdot t^* + \frac{M}{M+m} \cos\alpha \, v_m \cdot t^*$$

Aufgabe 5: (MB, WI/1 , BI)

Ein Balken (Biegesteifigkeit EI) wird durch einen Stab (Dehnsteifigkeit EA) gestützt. An dem Balken ist ein Seil (Dehnsteifigkeit $\frac{1}{2}EA$) der Gesamtlänge $5l$ befestigt, an dessen anderem Ende das Gewicht G hängt.
Bestimmen Sie die Absenkung w_G des Gewichts G.

Gegeben: EA, EI, l, G



1. Verlängerung des Seiles:

$$\Delta l_1 = \frac{G \cdot 5l}{\frac{1}{2} EA}$$

2. Verlängerung des Stabes:

$$F_S = \frac{1}{2l} G \cdot \frac{4}{3} l = \frac{2}{3} G$$

$$\rightarrow \Delta l_2 = \frac{\frac{2}{3} G \cdot l}{EA}$$

3. Durchbiegung des Balkens:
(mit BLT)

$$\Delta l_3 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{G \cdot (2l)^3}{6} \; \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{G \cdot l^3}{EJ} \cdot \frac{8 \cdot 2 \cdot 4}{6 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{32}{243} \frac{G l^3}{EJ}$$

Gesamtabsenkung:

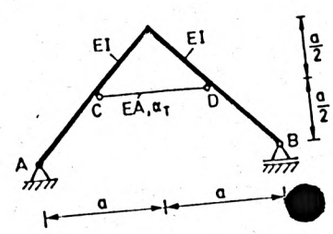
$$w_G = \Delta l_1 + \frac{2}{3} \Delta l_2 + \Delta l_3$$

$$w_G = \frac{G l}{EA}\left(10 + \frac{4}{3}\right) + \frac{G l^3}{EJ} \frac{32}{243}$$

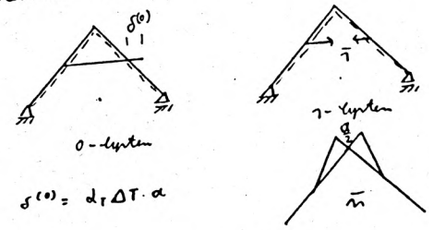
Aufgabe 6: (MB, WI/ , BI)

Ein dehnstarrer Winkel der Biegesteifigkeit EI ist in den Punkten A und B gelenkig gelagert. Ein Stab (Dehnsteifigkeit EA) zwischen den Punkten C und D wird um ΔT erwärmt.
Bestimmen und skizzieren Sie die N-, Q- und M-Linien; ausgezeichnete Werte sind anzugeben.

Gegeben: $a, EA, EI, \alpha_T, \Delta T$



System ist statisch unbestimmt!

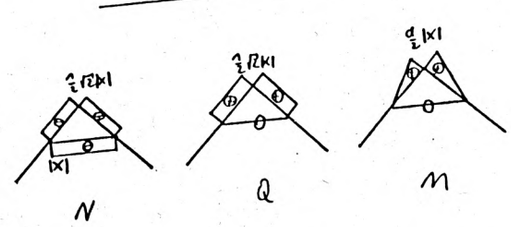


$$\delta^{(0)} = \alpha_T \Delta T \cdot a \qquad \bar{S} = 1$$

$$\delta^{(1)} = \int n^2 \frac{dx}{EJ} + \sum S_i^2 \cdot \frac{l_i}{EA_i}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \frac{a}{2} \sqrt{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{1}{EJ} + \frac{l}{EA} = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{a^3}{EJ} + \frac{a}{EA}$$

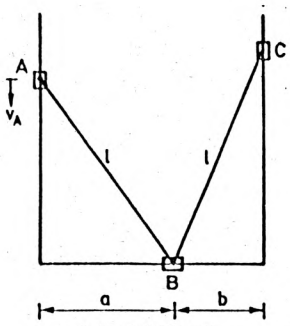
$$X = -\frac{\delta^{(0)}}{\delta^{(1)}} = \frac{\alpha_T \Delta T a}{\frac{\sqrt{2}}{12} \frac{a^3}{EJ} + \frac{a}{EJ}}$$



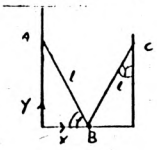
Aufgabe 10: (MB, WI/MB)

In dem maßstäblich dargestellten ebenen Getriebe sind die zwei starren Stangen AB und BC der Länge l durch die verschiebbaren Muffen A, B und C geführt. Die Muffe A bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_A nach unten.
a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten v_B und v_C der Muffen B und C.
b) Wie groß ist die Beschleunigung a_B der Muffe B?

Gegeben: v_A, l, a, b



a)



$$x_B = l\cdot\cos\gamma \rightarrow \dot{x}_B = -l\sin\gamma\cdot\dot{\gamma}$$

$$y_A = l\cdot\sin\gamma \rightarrow \dot{y}_A = l\cos\gamma\cdot\dot{\gamma}$$

$$\hookrightarrow \dot{\gamma} = \frac{\dot{y}_A}{l\cos\gamma}$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{v_A}{l\cdot\cos\gamma}$$

$$v_B = \dot{x}_B = -l\cdot\sin\gamma\cdot\frac{-v_A}{l\cos\gamma}$$

$$= +v_A\tan\gamma$$

$$= v_A\cdot\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{a}$$

Analog für v_C: $v_C = v_B\cdot\tan\beta$

$$v_C = v_B\cdot\frac{b}{\sqrt{l^2-b^2}} = v_A\sqrt{\frac{l^2-a^2}{l^2-b^2}}\;\frac{b}{a}$$

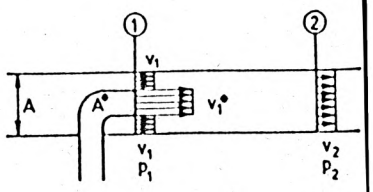
b) $$a_B = \frac{d}{dt}\dot{x}_B = \frac{d}{dt}\left(v_A\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{a}\right) = \frac{\frac{1}{2}\frac{(-2a)}{\sqrt{l^2-a^2}}\cdot a - \sqrt{l^2-a^2}}{a^2}\cdot v_A^2\cdot\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{a}$$

$$= v_A^2\left(-\frac{1}{a} - \frac{l^2}{a^3} + \frac{1}{a}\right) = -\frac{l^2}{a^3}\cdot v_A^2$$

Aufgabe 10: (BI)

In einer Wasserstrahlpumpe fließt Wasser der Dichte ρ. Die Geschwindigkeit an der Stelle 1 ist v_1. Dort wird ein Strahl mit der Querschnittsfläche A^* und der Geschwindigkeit v_1^* eingeführt und der Druck p_1 gemessen. Der Gesamtquerschnitt ist A.
An der Stelle 2 stellt sich infolge Mischung ein gleichmäßiges Geschwindigkeitsprofil ein.
a) Berechnen Sie an der Stelle 2 die Geschwindigkeit v_2.
b) Berechnen Sie an der Stelle 2 den Druck p_2.
c) Wie groß ist der Energieverlust zwischen den Stellen 1 und 2 ?

Gegeben: A, $A^* = \frac{1}{2}A$, v_1, $v_1^* = 3v_1$, p_1



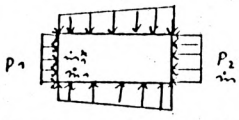
a.) Kontinuitätsgleichung zwischen ① und ②

$$v_1(A-A^*) + v_1^*\cdot A^* = v_2\cdot A$$

$$v_1\cdot\frac{1}{2}A + 3v_1\cdot\frac{1}{2}A = v_2\,A$$

$$v_2 = 2v_1$$

b) Impulsbilanz für ein Kontrollvolumen zwischen ① und ②:



$$A(p_1-p_2) = \dot{m}\,v_2 - (\dot{m}_1^*\cdot v_1^* + \dot{m}_1\cdot v_1)$$

mit: $\dot{m} = \rho v_2 A$

$\dot{m}_1^* = \rho\cdot v_1^*\cdot A^*$

$\dot{m}_1 = \rho\cdot v_1(A-A^*)$

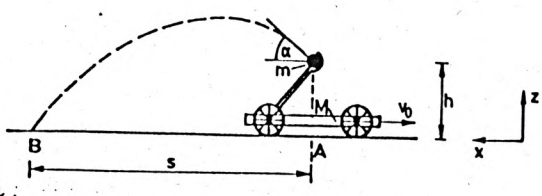
folgt: $A(p_1-p_2) = \rho v_2^2 A - (\rho v_1^{*2}A^* + \rho v_1^2(A-A^*))$

$p_2 = p_1 + \rho v_1^2$

Aufgabe 7: (MB, WI/MB, BI)

Von einem römischen Streitwagen (Masse M) werde ein Geschoß (Masse m) aus der Höhe h unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit v_m relativ zum Wagen geschleudert. Vor dem Wurf sei die Geschwindigkeit des Wagens v_0.
a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Wagens nach dem Wurf?
b) Wie groß ist der Abstand s zwischen der Abwurfstelle A und und dem Aufschlagpunkt B der Masse m?

Gegeben: M, m, v_m, v_0, h



a) Impulssatz:

$$M\cdot v_0 + m\cdot v_0 = M\cdot v + m\cdot(v - \cos\alpha\, V_m)$$

$$v_0(M+m) = v(M+m) - m\cos\alpha\, V_m$$

$$v = v_0 + \frac{m}{M+m}\cos\alpha\, V_m$$

b.) Absolutgeschwindigkeit der Masse m nach dem Wurf $\hat{V}_m$ in x-Richtung:

$$\hat{V}_{mx} = -V + \cos\alpha\, V_m$$

$$= -V_0 + \frac{M}{M+m}\cos\alpha\, V_m$$

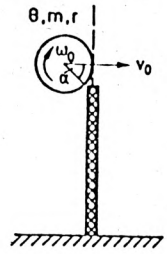
vertikaler Weg:

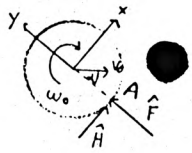
$$s_z(t) = -\frac{1}{2}g\cdot t^2 + V_m\cdot\sin\alpha\cdot t + h$$

Aufgabe 9: (MB, WI/MB, BI)

Ein horizontal anfliegender Tennisball (Geschwindigkeit v_0, Winkelgeschwindigkeit ω_0) stößt gegen die als starr angenommene Netzkante. Während des Stoßes haftet der Ball. Die Stoßzahl in radialer Richtung sei e.
Wie groß muß bei gegebenen ω_0 die Geschwindigkeit v_0 sein, damit der Ball nach dem Stoß vertikal nach oben abprallt?

Gegeben: $m, r, \Theta, \alpha, e, \omega_0$





Impulssätze:

$$(m\cdot(\bar{V}_x - V_x) = \hat{H}) \text{ NICHT NÖTIG}$$

$$m(\bar{V}_y - V_y) = \hat{F} \quad (1)$$

$$\Theta(\bar{\omega} - \omega_0) = -\hat{H}\cdot r \quad (2)$$

Kinematik:

$$V_x = V_0\cdot\sin\alpha \quad (3)$$

$$V_y = -V_0\cdot\cos\alpha \quad (4)$$

Stoßbedingung:

Haftung bei Punkt A $\rightarrow$ $\bar{V}_x - \bar{\omega}\cdot r = 0$ (5)

$$V_y\cdot e = -\bar{V}_y \quad (6)$$

Abflugbedingung: $-\bar{V}_y\cdot\cos\alpha + \bar{V}_x\cdot\sin\alpha = 0$ (7)

$\longrightarrow$ 7 Gleichungen für die 7 Unbekannten $V_x, V_y, \bar{V}_x, \bar{V}_y, \bar{\omega}, \hat{H}, V_0$

$$\longrightarrow \quad V_0 = \frac{\Theta\cdot\sin\alpha}{(\Theta + m r^2)\, e\cdot\cos^2\alpha - m r^2\sin^2\alpha}\cdot r\cdot\dot{\gamma}_0$$

TECHNISCHE HOCHSCHULE DARMSTADT

DIPLOM-VORPRÜFUNG IN TECHNISCHER MECHANIK AM 14. MÄRZ 1988

.....

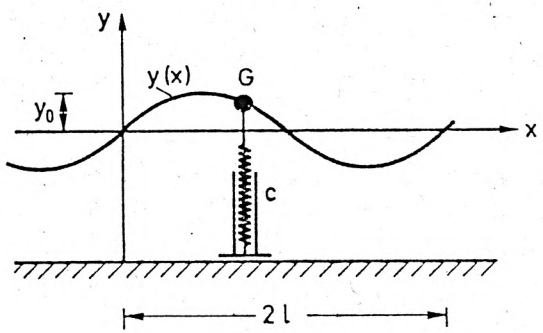
(Name) (Vorname) (Matr.-Nr.) (FB)

Die Aufgaben sind nicht nach ihrem Schwierigkeitsgrad geordnet. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und numerieren Sie die Blätter. Der Lösungsweg soll klar erkennbar sein, die Ergebnisse müssen deutlich hervorgehoben werden.

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines DIN A4 - Blattes sowie die drei Hilfsblätter zur TM II zu benutzen.

Aufgabe 1: (MB, WI/MB, BI)

Ein Körper (Gewicht G) kann längs einer reibungsfreien Bahn $y(x)=y_0 \sin\frac{\pi x}{\ell}$ so geführt werden, daß sich die an ihm befindliche Feder (Federsteifigkeit c) stets senkrecht unter ihm befindet. Die Feder ist für y = 0 entspannt.

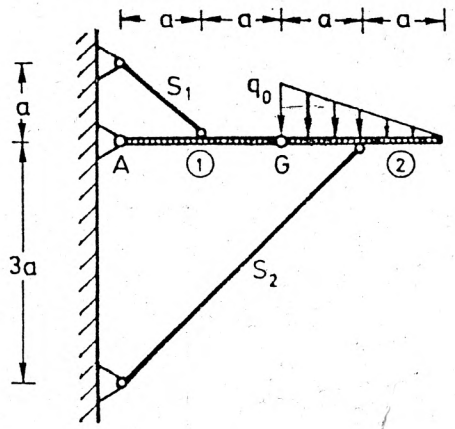


a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen.

b) Diskutieren Sie deren Stabilität für $\frac{G}{cy_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

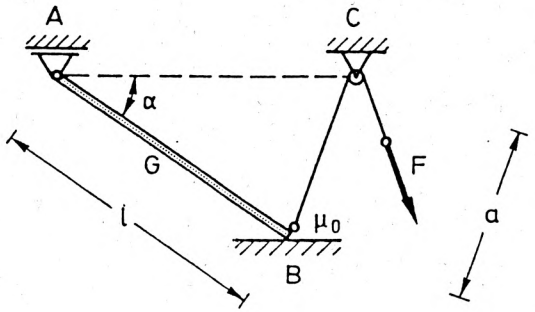
c) Wie groß darf y_0 höchstens sein, damit bei $x = \frac{3}{2}\ell$ eine stabile Gleichgewichtslage vorliegt?

Aufgabe 2: (MB, WI/MB, BI)



Ermitteln und skizzieren Sie für die Balken ① und ② den Normalkraft-, den Querkraft- und den Momentenverlauf. (Ausgezeichnete Werte sind anzugeben.)

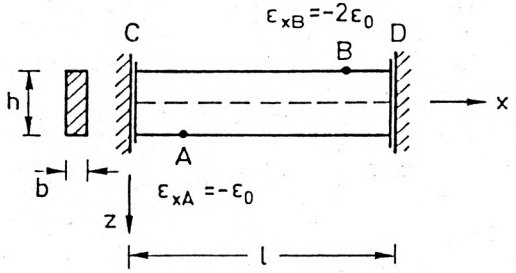
Aufgabe 3: (MB, WI/MB, BI)



Ein starrer Balken (Länge ℓ, Gewicht G) wird an seinem linken Ende reibungsfrei geführt und liegt mit seinem rechten Ende auf einer rauhen Unterlage (Haftkoeffizient μ_0) auf. An dem Balken ist ein Seil befestigt, das bei C über eine reibungsfreie Rolle umgelenkt wird. Am Ende des Seils wirkt die Kraft F. Der Abstand a und der Winkel α sind vorgegeben.

Wie groß darf F höchstens sein, damit das System noch in Ruhe ist?

Aufgabe 4: (MB, WI/MB, BI)



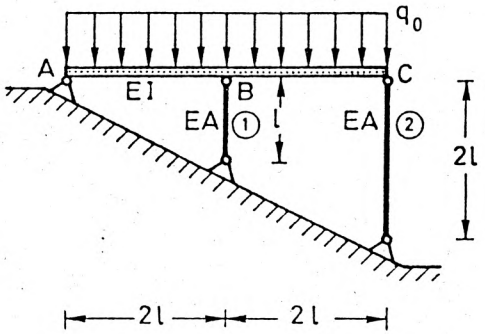
Ein Balken mit Rechteckquerschnitt (Länge ℓ, Höhe h, Breite b) wird zwischen zwei glatte Flächen bei C und D eingespannt. Auf der Unterseite (Punkt A) und auf der Oberseite (Punkt B) des Balkens werden danach mit Dehnungsmeßstreifen die Längsdehnungen $\varepsilon_{xA} = -\varepsilon_0$ und $\varepsilon_{xB} = -2\varepsilon_0$ festgestellt.

Bestimmen Sie unter Vernachlässigung von Eigengewicht und Querkraft

a) die Lagerreaktionen in C und D,

b) die Verkürzung des Balkens

Aufgabe 5: (MB, WI/MB, BI)



Ein Balken (Länge 4ℓ, Biegesteifigkeit EI) wird durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet. Er wird durch ein Lager A und 2 elastische Stäbe ① und ② (Längen ℓ und 2ℓ, Dehnsteifigkeiten EA) gestützt. Der Stab ① wird um Δ erwärmt (Wärmeausdehnungskoeffizient α).

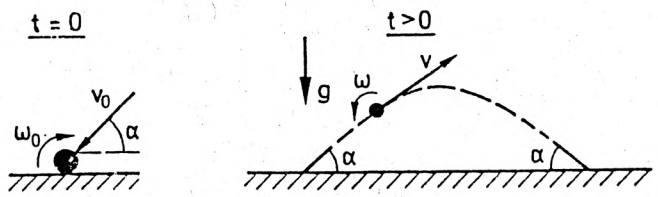
Man bestimme

a) die Stabkraft im Stab ①,

b) die Absenkung des Balkens an der Stelle B.

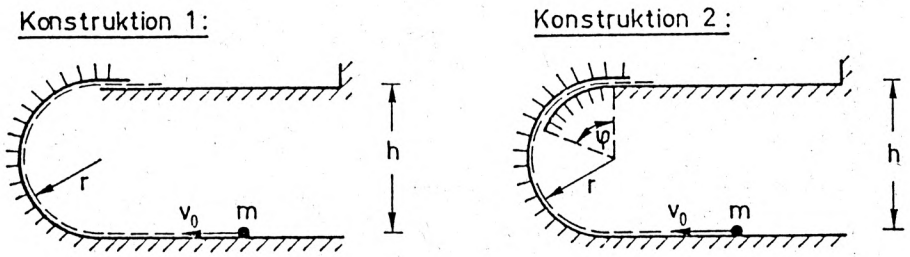
Aufgabe 9: (MB, WI/MB, BI)

Eine Kugel (Masse m, Radius r, $\Theta_s = \frac{2}{5} mr^2$) wird mit der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α auf eine rauhe Ebene geworfen.



Wie groß muß die Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_0 sein, damit die Kugel für alle Zeiten auf der skizzierten Bahn hin- und herspringt? Dabei soll angenommen werden, daß die Stöße ideal elastisch sind und daß die Kugel beim Stoß haftet.

Aufgabe 10: (MB, WI/MB)



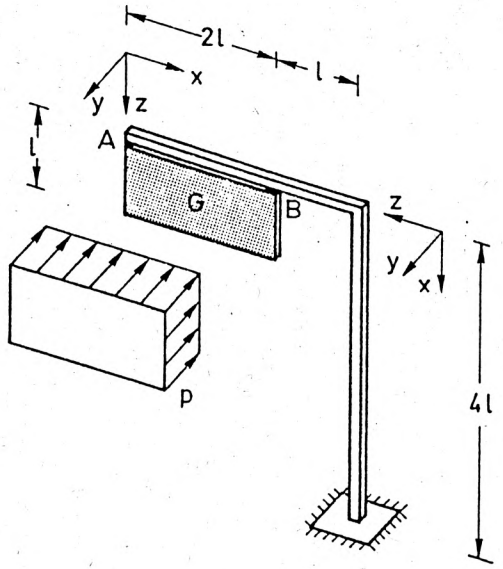
Eine als Massenpunkt idealisierte Bowlingkugel (Masse m) gleitet reibungsfrei mit der Geschwindigkeit v_0 auf dem Rücklauf einer Bowlingbahn. Am Ende des Rücklaufes wird der Massenpunkt auf einer Kreisbahn mit dem Radius r auf die Höhe h = 2r geführt.

a) Wie groß muß die Geschwindigkeit v_0 bei der Konstruktion 1 mindestens sein, damit der Massenpunkt die obere Ebene erreicht?

b) Wie groß muß die Geschwindigkeit v_0 in Abhängigkeit vom Winkel φ bei der Konstruktion 2 mindestens sein, damit der Massenpunkt die obere Ebene erreicht?
Wie groß muß der Winkel φ mindestens gewählt werden, damit v_0 minimal wird?

TIP: Erst mal rechnen und nicht gleich in die Lösungen spicken!

Aufgabe 6: (MB, WI/MB, BI)

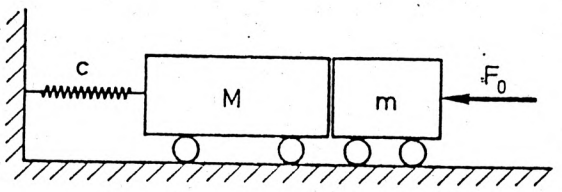


Ein Verkehrsschild ist in den Punkten A und B mit einem gewichtslosen Ständer verbunden. Dieser wird durch das Eigengewicht G des Schildes sowie einen gleichmäßig über die Schildfläche verteilten Winddruck p belastet. Der Ständer besteht aus zwei rechtwinklig biegesteif miteinander verbundenen, dehnstarren Balken (Biegesteifigkeit $EI_y = EI_z = EI$, Torsionssteifigkeit GI_T). Die Verbindung im Punkt A kann Kräfte in allen Richtungen sowie ein Moment um die lokale x-Achse übertragen. Die Verbindung in B überträgt nur Kräfte in lokaler y- und z-Richtung.

Berechnen Sie für den Endpunkt A des Kragarmes die Verschiebungen in lokaler y- und z-Richtung sowie die Verdrehung um die x-Achse.

Aufgabe 7: (MB, WI/MB, BI)

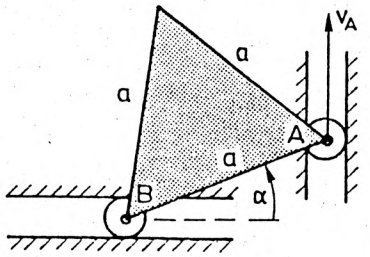
Die gezeichnete Anordnung besteht aus der Masse M, die durch eine Feder (Federsteifigkeit c) gefesselt ist und aus der Masse m, die sich frei bewegen kann. Für t < 0 wird m durch die Kraft F_0 an M gedrückt. Zur Zeit t = 0 wird die Kraft F_0 plötzlich zu Null.



a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v, mit der sich die Masse m nach dem Ablösen von M bewegt.

b) Mit welcher Frequenz und mit welcher Amplitude schwingt die Masse M nach dem Ablösen?

Aufgabe 8: (MB, WI/MB, BI)



Zwei Punkte A und B einer gleichseitigen Dreiecksscheibe (Seitenlänge a) werden, wie skizziert, geführt. Die Geschwindigkeit des Punktes A ist durch v_A=konst. gegeben.

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α ($0° < \alpha < 90°$) die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes B sowie die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung der Dreiecksscheibe.

Aufgabe 1

Potential: $U = G\,y(x) + \frac{1}{2}c\,[y(x)]^2$

$$= G\,y_0 \sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2}c\,y_0^2 \sin^2\frac{\pi x}{l}$$

1. Ableitung: $\frac{dU}{dx} = G\,y_0\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi x}{l}\left(1 + \frac{c\,y_0}{G}\sin\frac{\pi x}{l}\right)$

2. Ableitung: $\frac{d^2U}{dx^2} = -c\left(\frac{\pi y_0}{l}\right)^2\left[\sin^2\frac{\pi x}{l} - \cos^2\frac{\pi x}{l} + \frac{G}{c\,y_0}\sin\frac{\pi x}{l}\right]$

a) Gleichgewichtslagen für $\frac{dU}{dx} = 0$

I. $\cos\frac{\pi x}{l} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{2n+1}{2}\cdot l}}\ ,\ n \in \mathbb{Z}$

II. $\sin\frac{\pi x}{l} = -\frac{G}{c\,y_0} \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{4n-1}{2}\cdot l \pm \left[\frac{l}{2} + \frac{l}{\pi}\arcsin\frac{-G}{c\,y_0}\right]}}$,

$\underline{\underline{n \in \mathbb{Z}}}$

b) I. $\cos\frac{\pi x}{l} = 0$, $\sin\frac{\pi x}{l} = \pm 1$, $\frac{G}{c\,y_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{I} = -c\left(\frac{\pi y_0}{l}\right)^2\left[1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right] < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{instabil}}}$$

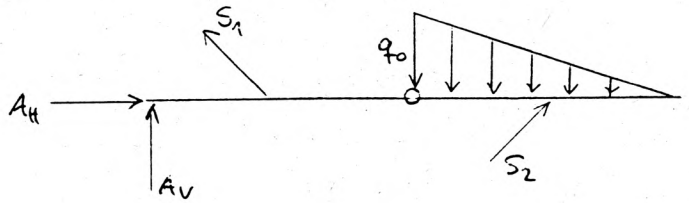
II. $\sin\frac{\pi x}{l} = \frac{-G}{c\,y_0}$, $\frac{G}{c\,y_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{II} = -c\left(\frac{\pi y_0}{l}\right)^2\left[\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{stabil}}}$$

c) $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=\frac{3}{2}l} = -c\left(\frac{\pi y_0}{l}\right)^2\left[1 - \frac{G}{c\,y_0}\right] > 0 \Rightarrow \underline{\underline{y_0 < \frac{G}{c}}}$

Aufgabe 2

FKB:



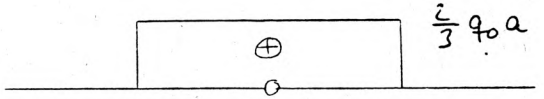
$\circlearrowleft G_r$: $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,S_2\cdot a - \frac{1}{2}q_0\,2a\cdot\frac{1}{3}2a = 0 \Rightarrow S_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,q_0\,a$

$\circlearrowleft A$: $-q_0\,a\,\frac{8}{3}a + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,S_2\cdot 3a + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,S_1\cdot a = 0 \rightarrow S_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,q_0\,a$

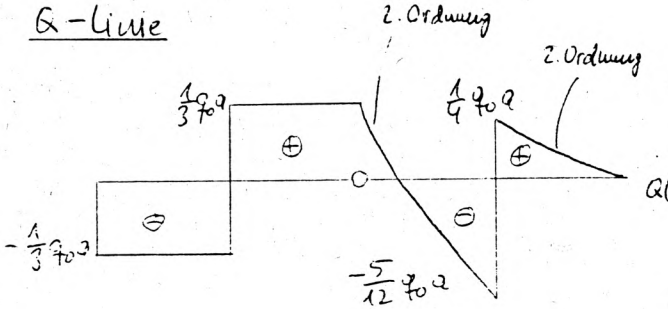
$\rightarrow$: $A_H - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,S_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,S_2 = 0 \Rightarrow A_H = 0$

$\uparrow$: $A_V + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,S_1 - \frac{1}{2}q_0\,2a + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,S_2 = 0 \Rightarrow A_V = -\frac{1}{3}q_0\,a$

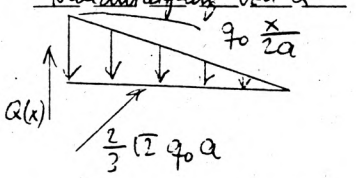
N-Linie



Q-Linie



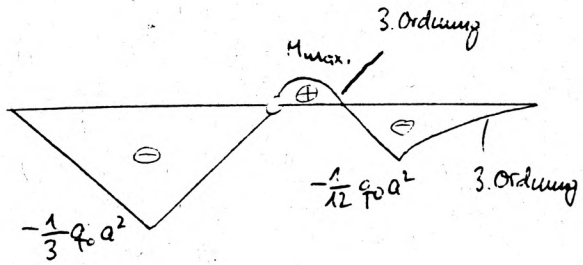
Nulldurchgang von Q:



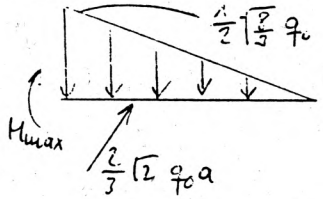
$Q(x) = \frac{1}{2}\frac{q_0}{2a}x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{2}{3}\sqrt{2}\,q_0\,a = 0$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{8}{3}}\,a$

M-Linie



M_{max} im Bereich $a \le x \le 2a$:



$\longleftarrow \sqrt{\frac{8}{3}}\, a \longrightarrow$

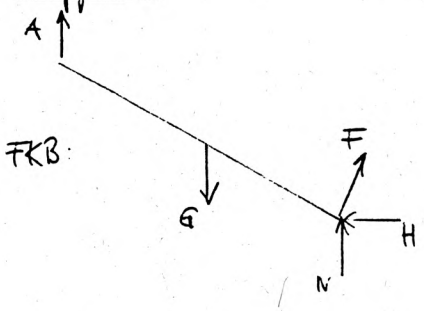
$$M_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{2}{3}\sqrt{2}\, q_0 a\left(\sqrt{\frac{8}{3}}-1\right) a$$

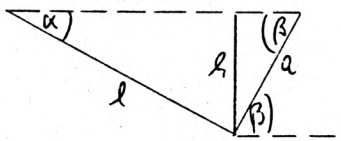
$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{3}}\, q_0 \sqrt{\frac{8}{3}}\, a\, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}\, a$$

$$M_{max} = \left[\frac{4}{9}\sqrt{\frac{8}{3}} - \frac{2}{3}\right] q_0 a^2$$

f

Aufgabe 3





$$\sin\beta = \frac{l}{a}\sin\alpha$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{l}{a}\sin\alpha\right)^2}$$

$\circlearrowleft B$: $\left(\frac{1}{2}G - A\right) l \cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow A = \frac{1}{2} G$

$\uparrow$: $N + F\sin\beta - G + A = 0 \quad \Rightarrow N = \frac{1}{2}G - F\sin\beta$

$\rightarrow$: $F\cos\beta - H = 0 \quad \Rightarrow H = F\cos\beta$

kein Rutschen: $|H| \le \mu_0 |N| \Rightarrow F \le \dfrac{\mu_0 G}{2\{|\cos\beta| + \mu_0 \sin\beta\}}$

kein Abheben: $N \ge 0$ $\quad F = \dfrac{G}{2 \cdot \sin\beta}$ (nicht maßgebend)

Aufgabe 4

gerade Biegung mit Normalkraft

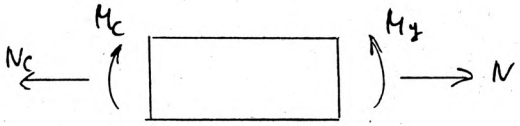
$$\varepsilon_x = \frac{N}{EA} + \frac{M_y}{EI_y}\cdot z \quad , \quad A = b\cdot h \quad , \quad I_y = \frac{b h^3}{12}$$

Punkt A: $\varepsilon_{xA} = \frac{N}{EA} + \frac{M_y}{EI_y}\cdot\frac{h}{2} = -\varepsilon_0$

Punkt B: $\varepsilon_{xB} = \frac{N}{EA} - \frac{M_y}{EI_y}\cdot\frac{h}{2} = -2\,\varepsilon_0$

$\Rightarrow$ Schnittgrößen $N = -\frac{3}{2} EA\,\varepsilon_0$, $M_y = \frac{EI_y}{h}\,\varepsilon_0$

a) Lagerreaktionen:



$$\underline{\underline{N_C = N_D}} = N = \underline{\underline{-\frac{3}{2} E b h\,\varepsilon_0}}$$

$$\underline{\underline{M_C = M_D}} = M_y = \underline{\underline{\frac{1}{12} E b h^2\,\varepsilon_0}}$$

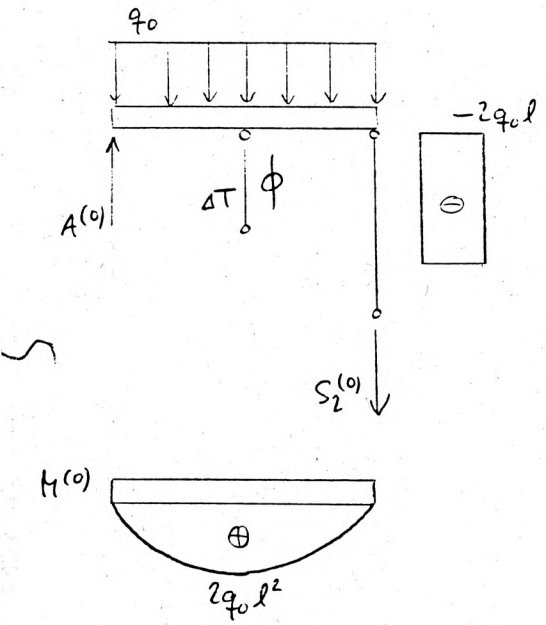
b) Balkenverkürzung:

$$\underline{\underline{\Delta l}} = \frac{N l}{EA} = \underline{\underline{-\frac{3}{2} l\,\varepsilon_0}}$$

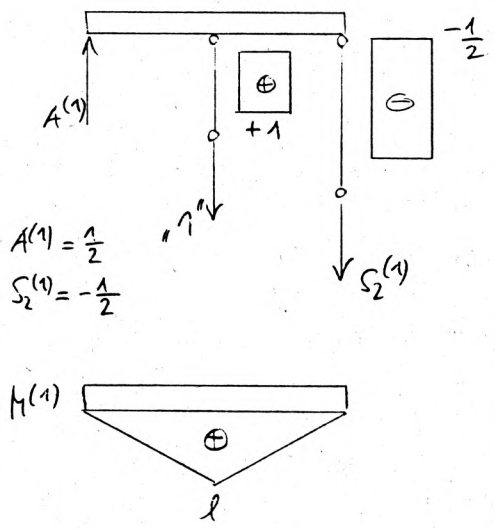
Aufgabe 5

System 1-fach statisch unbestimmt.

„0"-System



„1"-System



Absenkung des unteren Endes von Stab 1 im „0"-System infolge Temperaturerhöhung im Stab 1: $\Delta u_1^{(0)} = \alpha \Delta T \cdot l$

$$\delta_{01} = \int \frac{M^{(0)} \cdot M^{(1)}}{EI} dx + \sum_{i=1}^{2} \frac{S_i^{(0)} \cdot S_i^{(1)}}{EA} l_i + \Delta u_1^{(0)}$$

$$= 2 \frac{1}{EI} \frac{5}{12} 2l \cdot 2q_0 l^2 \cdot l + \frac{1}{EA} (-2q_0 l)(-\tfrac{1}{2}) 2l + \alpha \Delta T l$$

$$= \frac{10}{3} \frac{q_0 l^4}{EI} + 2 \frac{q_0 l^2}{EA} + \alpha \Delta T l$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M^{(1)} \cdot M^{(1)}}{EI} dx + \sum_{i=1}^{2} \frac{S_i^{(1)} \cdot S_i^{(1)}}{EA} l_i$$

$$= 2 \frac{1}{EI} \frac{1}{3} 2l \cdot l \cdot l + \frac{1}{EA} \left[1 \cdot 1 \cdot l + (-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2}) 2 l \right]$$

$$= \frac{4}{3} \frac{l^3}{EI} + \frac{3}{2} \frac{l}{EA}$$

$$X = \underline{\underline{S_1}} = -\frac{\delta_{01}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{10}{3} \frac{q_0 l^4}{EI} + 2 \frac{q_0 l^2}{EA} + \alpha \Delta T l}{\frac{4}{3} \frac{l^3}{EI} + \frac{3}{2} \frac{l}{EA}}$$

Balkenabsenkung bei B = Verkürzung der Stabes 1

$$f_B = -\frac{S_1 l}{EA} - \alpha \Delta T l$$

$$f_B = \frac{\frac{10}{3} \frac{q_0 l^4}{EI} + 2 \frac{q_0 l^2}{EA} + \alpha \Delta T l}{\frac{4}{3} \frac{A l^2}{I} + \frac{3}{2}} - \alpha \Delta T l$$

Weitere mögliche Lösungswege:

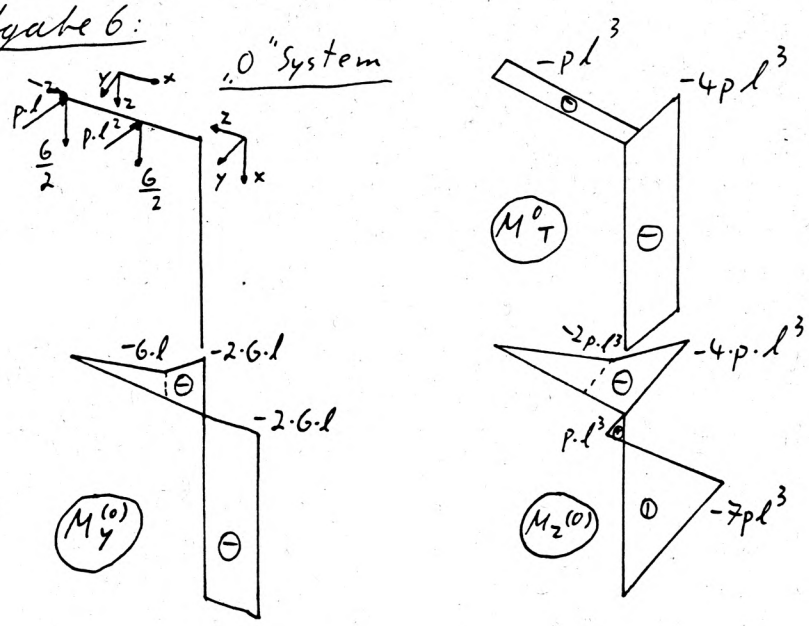
a) Stabkraft „1" am Stab 2 antragen

b) mit Hilfe der Biegelinientafel

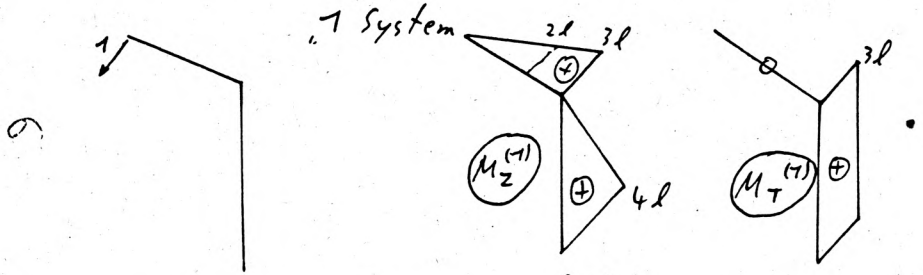
c) Integration der Biegelinie mit Föppl-Symbol

Aufgabe 6:

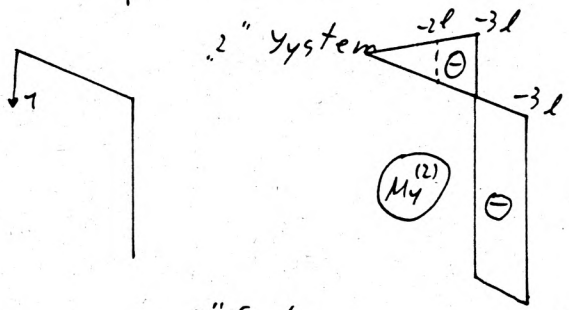
„0" System



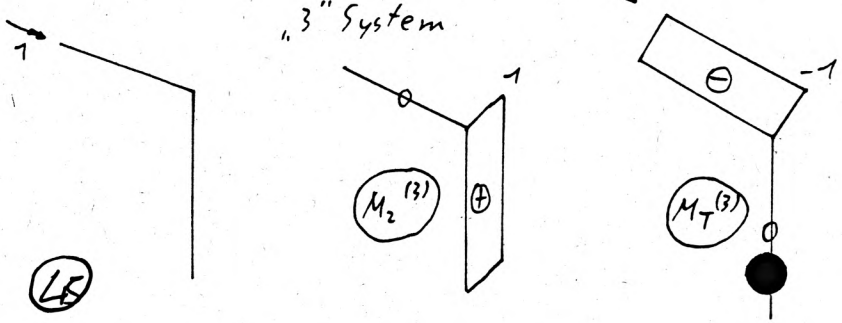
„1" System



„2" System



„3" System



$$\underline{\underline{v_A}} = \int \frac{M_z^{(0)} M_z^{(I)}}{E\cdot I}\,dx + \int \frac{M_T^{(0)} M_T^{(1)}}{G\cdot I_T}\,dx$$

$$= \underline{\underline{-\frac{135\,p\cdot l^5}{3E\cdot I} - \frac{48\,p\cdot l^5}{G\cdot I_T}}}$$

$$\underline{\underline{w_A}} = \int \frac{M_y^{(0)}\cdot M_y^{(1)}}{E\cdot I}\,dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{1756\cdot l^3}{6E\cdot I}}}$$

$$\underline{\underline{\varphi_A}} = \int \frac{M_z^{(0)} M_z^{(3)}}{E\cdot I}\,dx + \int \frac{M_T^{(0)}\cdot M_T^{(3)}}{G\cdot I_T}\,dx$$

$$= \underline{\underline{-\frac{12\,p\,l^4}{E\cdot I} + \frac{3\cdot p\cdot l^4}{G\cdot I_T}}}$$

Aufgabe 7

a) Ablösen der Masse m mit der Geschwindigkeit v bei entspannter Feder

$$\frac{1}{2}c\,x_F^2 = \frac{1}{2}(M+m)v^2\,, \quad x_F = \frac{F_0}{c}$$

$$\Rightarrow v = \frac{F_0}{\sqrt{c\cdot(M+m)}}$$

b)

Dgl: $M\ddot{x} + c\cdot x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{c}{M}}$

Frequenz: $f = \frac{\omega}{2\cdot\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{M}}$

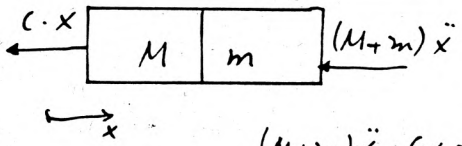
allgemeine Lösung: $x(t) = A\cdot\cos\omega t + B\cdot\sin\omega t$

Anfangsbedingungen: $\left.\begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} A = 0 \\ B = \frac{v}{\omega} \end{array}$

$$x(t) = \frac{v}{\omega}\sin\omega t = \frac{F_0}{c}\sqrt{\frac{M}{M+m}}\,\sin\omega t$$

Amplitude: $\frac{F_0}{c}\sqrt{\frac{M}{M+m}}$

a)



$$(M+m)\ddot{x} + c\cdot x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m+M}x = 0$$

AB: $x(t=0) = -\frac{F_0}{c}$

$\dot{x}(t=0) = 0$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\dot{x}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\bar{v}} \dot{x}\,d\dot{x} = -\int_{-\frac{F_0}{c}}^{0} \frac{c}{m+M}\,x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\bar{v}^2 = \frac{1}{2}\frac{c}{m+M}\left(\frac{F_0}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{F_0^2}{c(m+M)}$$

$$\underline{\underline{\bar{v} = F_0\frac{1}{\sqrt{c(m+M)}}}}$$

b) $\omega = \sqrt{\frac{c}{M}}$

$$\frac{1}{2}v_{max}^2 = \frac{1}{2}(\omega x_{max})^2$$

$$v_{max} = \bar{v}$$

$$\underline{\underline{x_{max} = \frac{\bar{v}}{\omega} = \frac{F_0}{c}\sqrt{\frac{M}{m+M}}}}$$

Aufgabe 8

Geometrie

$x_B = a\cdot\cos\alpha$

$y_A = a\cdot\sin\alpha$

Winkelgeschw. der Scheibe: $\dot{y}_A = v_A = a\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\alpha$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{\alpha} = \frac{v_A}{a\cdot\cos\alpha}}}$$

Winkelbeschl.: $\ddot{\alpha} = \frac{v_A\cdot a\cdot\dot{\alpha}\cdot\sin\alpha}{a^2\cdot\cos^2\alpha} = \underline{\underline{\frac{v_A^2}{a^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}}}$

$$\dot{x}(B) = -a\cdot\dot{\alpha}\cdot\sin\alpha = -a\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\alpha\cdot\tan\alpha = \underline{\underline{-v_A\cdot\tan\alpha}}$$

$$\ddot{x}(B) = -\frac{v_A\cdot\dot{\alpha}}{\cos^2\alpha} = \underline{\underline{-\frac{v_A^2}{a\cdot\cos^3\alpha}}}$$

Aufgabe 9

Bewegung wiederholt sich, wenn sich beim Stoß Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit der Masse umkehren jedoch betragsmäßig gleichbleiben

vor dem Stoß:

$v_x = -v_0\cdot\cos\alpha$

$v_y = -v_0\cdot\sin\alpha$

$\dot{\varphi}_0 = -\omega_0$

nach dem Stoß:

$w_x = v_0\cdot\cos\alpha$

$w_y = v_0\cdot\sin\alpha$

$\dot{\varphi}_n = \omega_0$

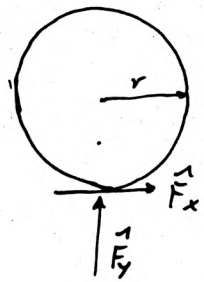
Impulssatz horizontal:

$$m(w_x - v_x) = \hat{F}_x$$

Drallsatz:

$$\Theta_S(\dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_0) = r\cdot\hat{F}_x$$

$$\Rightarrow \frac{\Theta_S}{r}(\dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_0) = m(w_x - v_x)$$

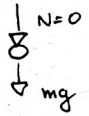


mit $\Theta_S = \frac{2}{5}mr^2$

$$\underline{\underline{\omega_0 = \frac{5}{2}\cdot\frac{v_0}{r}\cdot\cos\alpha}}$$

Aufgabe 10

a) GESCHWINDIGKEIT VON m BEI ERREICHEN DER OBEREN EBENE DANN MINIMAL, WENN NORMALKRAFT ZWISCHEN WAND UND KUGEL AM ENDE DER KREISBAHN VERSCHWINDET

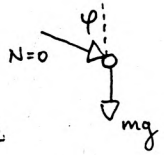


$$m a_n = mg \quad , \quad a_n = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = rg$$

ENERGIESATZ: $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mg\, 2r$

$$\Leftrightarrow \quad v_0 = \sqrt{5rg}$$

b) $v_0(\varphi)$ WIRD DANN MINIMAL, WENN DIE NORMALKRAFT BEI ERREICHEN DER FÜHRUNG VERSCHWINDET. AUSSERDEM MUß DIE KUGEL MIT DER GESCHWINDIGKEIT $v \geq 0$ AUF DER OBEREN EBENE ANKOMMEN.



$$m a_n = mg\cos\varphi \quad , \quad a_n = \frac{v^2(\varphi)}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v^2(\varphi) = rg\cos\varphi \quad , \quad \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

ENERGIESATZ ZWISCHEN DER ~~OBEREN~~ UNTEREN EBENE UND BEGINN DER FÜHRUNG

$$\frac{1}{2} m v_0^2(\varphi) = \frac{1}{2} m v^2(\varphi) + mgr(1+\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad v_0(\varphi) = \sqrt{2gr\left(1+\frac{3}{2}\cos\varphi\right)}$$

ENERGIESATZ ZW. UNTERER & OBERER EBENE $(v=0)$

$$\frac{1}{2} m v_0^2(\varphi) \geq 2mgr$$

$$\Rightarrow v_0(\varphi) \geq \sqrt{4gr} \Rightarrow \cos\varphi \geq \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi \leq 48{,}2^\circ$$

Für $\varphi = 48{,}2^\circ$ wird die minimal erforderliche Anfangsgeschw. $v_0 = \sqrt{4gr}$ erreicht. Diese kann auch bei einer längeren Führung ($\varphi > 48{,}2^\circ$) nicht verringert werden, da die Kugel sonst die erstrebte obere Ebene nicht erreichen tut.

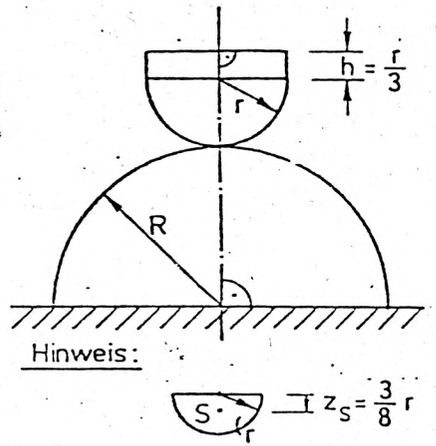
TECHNISCHE HOCHSCHULE DARMSTADT

DIPLOMVORPRÜFUNG IN TECHNISCHER MECHANIK AM 15. September 1986

..... (Name) ..... (Vorname) ..... (Matr.-Nr.) ..... (FB)

Die Aufgaben sind nicht nach ihrem Schwierigkeitsgrad geordnet. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und numerieren Sie die Blätter.
Der Lösungsweg soll klar erkennbar sein, die Ergebnisse müssen deutlich hervorgehoben werden.
Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung vom Umfang eines Blattes DIN A4 sowie die drei Hilfsblätter TM II zu benutzen.

Aufgabe 1:

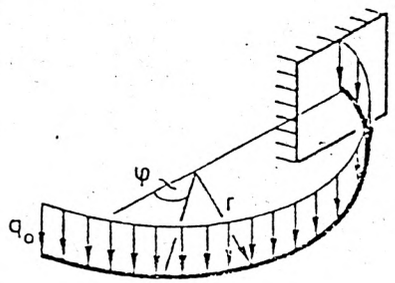


Ein homogener Körper, bestehend aus einer Halbkugel vom Radius r und einem Zylinder der Höhe $h = \frac{r}{3}$, ruht in der abgebildeten Lage auf dem höchsten Punkt einer Halbkugel vom Radius R. Die Oberflächen sind rauh.

a) Bestimmen Sie die potentielle Energie für eine beliebige ausgelenkte Lage und zeigen Sie, daß die dargestellte Lage eine Gleichgewichtslage ist.

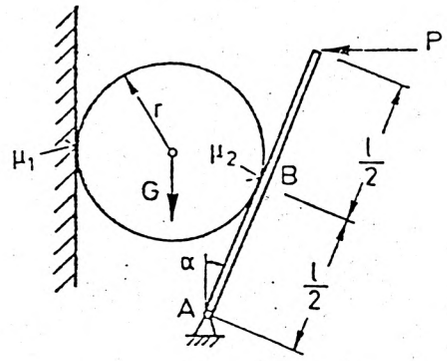
b) Wie groß darf r höchstens sein, damit die abgebildete Lage stabil ist?

Aufgabe 2:



Der eingespannte Halbkreisträger (Radius r) ist durch eine konstante Streckenlast q belastet.
Man bestimme die Verläufe aller auftretenden Schnittgrößen in analytischer Form.

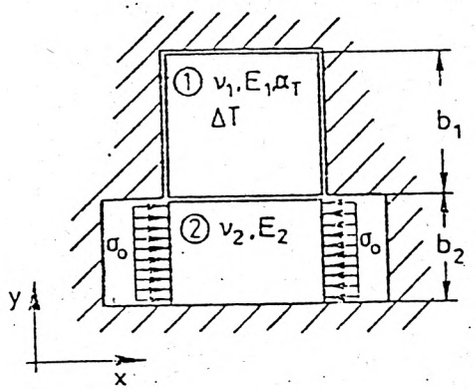
Aufgabe 3:



Eine Kugel (Gewicht G, Radius r) wird durch einen gewichtslosen Hebel (Länge l, Haftungskoeffizient μ_2) gegen eine Wand (Haftungskoeffizient μ_1) gedrückt. Der Winkel α sei gegeben, und der Abstand zwischen Berührungspunkt B und Lager A sei l/2.

Wie groß müssen μ_1 und μ_2 mindestens sein, damit die Kugel nich nach oben rutscht?

Aufgabe 4:

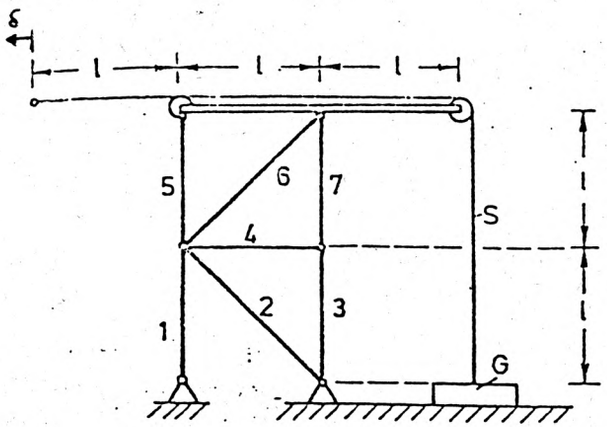


In die skizzierte starre Einfassung mit reibungsfreien Berandungen werden zwei rechteckige Scheiben gleicher Dicke im belastungsfreien Zustand gerade passend eingesetzt.
Die Rechteckscheibe ① (Breite b_1, E-Modul E_1, Querdehnzahl ν_1, Wärmeausdehnungskoeffizient α_T) wird um ΔT erwärmt, während auf die Scheibe ② (Breite b_2, E-Modul E_2, Querdehnzahl ν_2) eine gleichförmige Druckspannung σ_0 in x-Richtung aufgebracht wird. Es wird ein ebener Spannungszustand angenommen.

a) Man berechne die Spannung σ_y in den Scheiben.

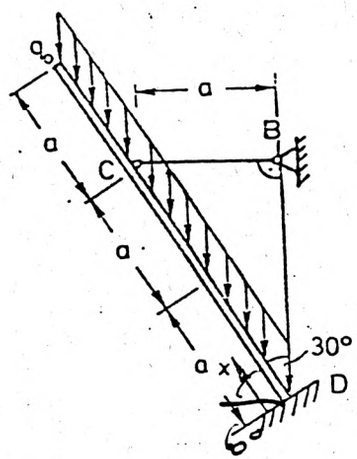
b) Welche Breitenänderung Δb_1 erfährt die Scheibe ①?

Aufgabe 5:



Das skizzierte Tragwerk besteht aus 7 Stäben (Dehnsteifigkeit EA), einem dehnstarren Balken (Biegesteifigkeit EI) und einem Seil S (Dehnsteifigkeit EA_S). Das Seil wird über reibungsfrei gelagerte Rollen mit vernachlässigbar kleinem Radius umgelenkt. Man bestimme den Weg δ, um den das Seil angezogen werden muß, damit das Gewicht G gerade abhebt.

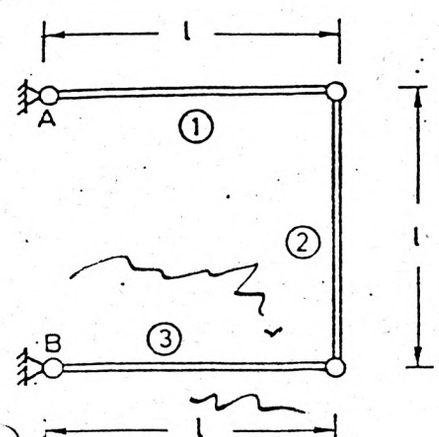
Aufgabe 6:



Ein dehnstarrer Balken (Länge 3a, Biegesteifigkeit EI) ist in D eingespannt und bei x = 2a durch einen Stab (Dehnsteifigkeit $EA = \frac{1}{15}\frac{EI}{a^2}$, Länge a) mit dem Lager B verbunden. Der Balken wird durch eine vertikale Streckenlast q_0 belastet.

Man berechne die Lagerkräfte und die Verschiebung des Punktes C.

Aufgabe 7:



Ein System aus drei gelenkig verbundenen homogenen, starren Balken (gleiche Länge ℓ, Massen m_1, m_2, m_3) wird im Erdschwerefeld aus der gezeichneten Ruhelage losgelassen.

Gesucht sind:

a) die Winkelbeschleunigung des Balkens 1 .

b) der Normalkraftverlauf im Balken 2 .

c) die Lagerreaktion in A, unmittelbar [redacted] dem Loslassen.

Aufgabe 8:

Ein durch ein elastisches Seil (Federsteifigkeit c) gesicherter Bergsteiger (Masse m) fällt die freie Höhe h, bevor sich das Seil spannt.

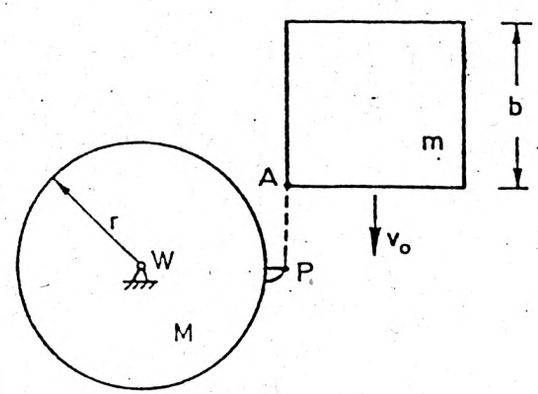
a) Welche Geschwindigkeit v_B hat der Bergsteiger nach Durchfallen der Höhe h? .

b) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Seilkraft.

c) Bestimmen Sie die Amplitude der sich einstellenden Schwingung.

d) Bei welcher Steifigkeit c* wird das Seil bei Vollausschlag auf die doppelte Länge gespannt?

Aufgabe 9:

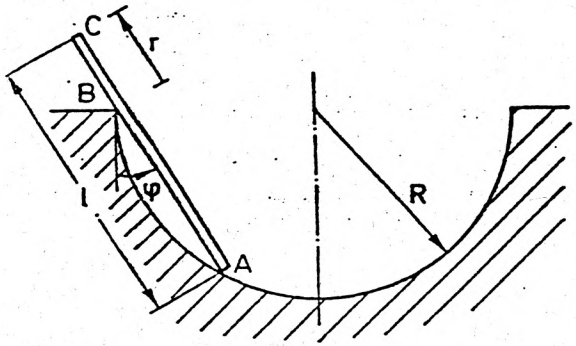


Eine quadratische homogene Scheibe (Masse m, Kantenlänge b) bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_0. Sie stößt (Stoßzahl e) mit der Ecke A rauh auf die vorstehende Nase P einer in W frei drehbar gelagerten homogenen Walze (Masse M, Radius r).

a) Man stelle die Gleichungen auf, die den Stoß vollständig beschreiben.

b) Für welches Massenverhältnis m/M sind die Winkelgeschwindigkeiten von Walze und Scheibe nach dem Stoß gerade gleich groß?

Aufgabe 10



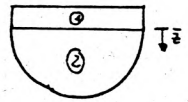
In einer halbkugelförmigen Schale (Radius R) soll eine Stange (Länge ℓ, Gleitpunkte A und B) so gleiten, daß sich ihr unteres Ende mit der konstanten Geschwindigkeit v_A bewegt. Die Bahn der Stange liegt in der Zeichenebene.

a) Welche Kurve beschreibt der Momentanpol und mit welcher Geschwindigkeit durchläuft er sie?

b) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der Stange?

c) Unter Verwendung von Polarkoordinaten (r, φ) bestimme man für das obere Ende C der Stange die Geschwindigkeits- und die Beschleunigungskomponenten als Funktion von φ.

Lsg Aufgabe 1) a) Schwerpunkt:



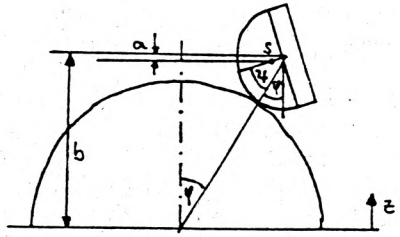
Zylinder: $V_1 = \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^3$

$\bar{z}_1 = -\frac{h}{2} = -\frac{1}{6} r$

Halbkugel: $V_2 = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

$\bar{z}_2 = \frac{3}{8} r$

$$\underline{\underline{\bar{z}_s}} = \frac{-\frac{1}{6} r \frac{1}{3}\pi r^3 + \frac{3}{8} r \frac{2}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3} = \left(-\frac{1}{18} + \frac{1}{4}\right) r = \underline{\underline{\frac{7}{36} r}}$$



Abrollbedingung:

$r\psi = R \cdot \varphi$

Geometrie:

$a = \bar{z}_s \cos(\varphi + \psi)$

$b = (r + R)\cos\varphi$

Potential: $\bar{u} = \rho g V z$; $z = b - a$

$$\bar{u}^* = \frac{\bar{u}}{\rho g V} = \left(1 + \frac{R}{r}\right) r \cos\varphi - \bar{z}_s \cos\left(\varphi\left(1 + \frac{R}{r}\right)\right)$$

Gleichgewicht:

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \varphi} = \left(1 + \frac{R}{r}\right) r \left[-\sin\varphi + \frac{\bar{z}_s}{r} \sin\left(\varphi\left(1 + \frac{R}{r}\right)\right)\right]$$

$$\left.\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0 \quad \rightarrow \text{Gleichgewicht für } \varphi = 0$$

b) $$\frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial \varphi^2} = r\left(1 + \frac{R}{r}\right)\left[-\cos\varphi + \frac{\bar{z}_s}{r}\left(1 + \frac{R}{r}\right)\cos\left(\varphi\left(1 + \frac{R}{r}\right)\right)\right]$$

$$\left.\frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi=0} = r\left(1 + \frac{R}{r}\right)\left[-1 + \frac{\bar{z}_s}{r}\left(1 + \frac{R}{r}\right)\right]$$

Gleichgewicht stabil: $\left[-1 + \frac{\bar{z}_s}{r}\left(1 + \frac{R}{r}\right)\right] \overset{!}{>} 0$

$$\Rightarrow \frac{\bar{z}_s}{r}\left(1 + \frac{R}{r}\right) > 1$$

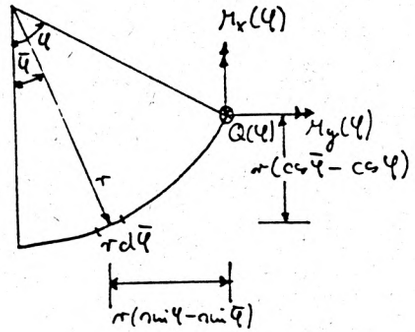
$$\bar{z}_s > 0 \qquad 1 + \frac{R}{r} > \frac{r}{\bar{z}_s}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} > \frac{36}{7} - 1 = \frac{29}{7}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{r < \frac{7}{29} R}}$$

Lsg Aufgabe 2

1 Lösungsweg



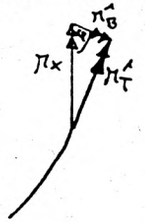
Schnittgrößen:

$$\underline{\underline{Q(\varphi) = -q_0 r \varphi}}$$

$$M_x(\varphi) = \int_0^\varphi q_0 r^2 (\sin\varphi - \sin\bar\varphi)\,d\bar\varphi = r^2 q_0 (\varphi \sin\varphi + \cos\varphi - 1)$$

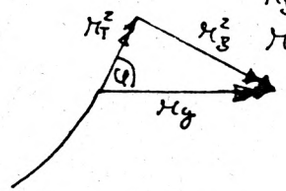
$$M_y(\varphi) = -\int_0^\varphi q_0 r^2 (\cos\bar\varphi - \cos\varphi)\,d\bar\varphi = r^2 q_0 (\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)$$

Aufspalten in Biege- und Torsionsmoment



$M_B^1 = -M_x \cos\varphi$

$M_T^1 = M_x \sin\varphi$



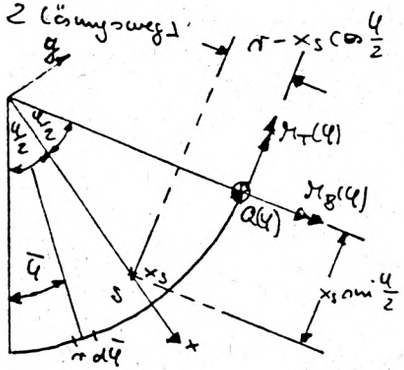
$M_B^2 = M_y \sin\varphi$

$M_T^2 = M_y \cos\varphi$

$$\underline{\underline{M_B}} = M_B^1 + M_B^2 = -M_x\cos\varphi + M_y \sin\varphi = \underline{\underline{r^2 q_0 (\cos\varphi - 1)}}$$

$$\underline{\underline{M_T}} = M_T^1 + M_T^2 = M_x \sin\varphi + M_y\cos\varphi = \underline{\underline{r^2 q_0 (\varphi - \sin\varphi)}}$$

2 Lösungsweg



Angriffspunkt der Resultierenden

Für gewählte Koordinatensystem gilt: $y_{S_\varphi} = 0$

$$\Sigma M_y: \int_0^\varphi r\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \bar\varphi\right) q_0 r\,d\bar\varphi = x_s q_0 r \varphi$$

$$\Rightarrow -r \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \bar\varphi\right)\Big|_0^\varphi = x_s \varphi$$

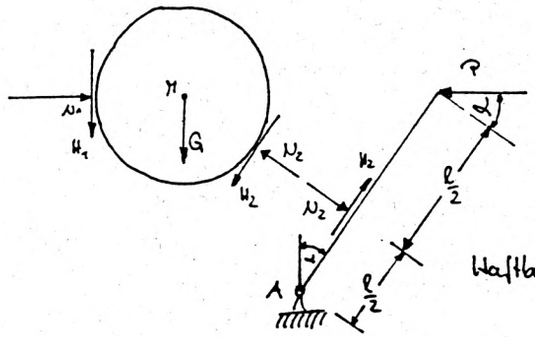
$$\Rightarrow x_s = \frac{2r\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}$$

$$\underline{\underline{Q(\varphi) = -q_0 r \varphi}}$$

$$\underline{\underline{M_T(\varphi)}} = q_0 r \varphi \left(r - x_s \cos\frac{\varphi}{2}\right) = \underline{\underline{q_0 r^2 (\varphi - \sin\varphi)}}$$

$$\underline{\underline{M_B(\varphi)}} = -q_0 r \varphi x_s \sin\frac{\varphi}{2} = -2 q_0 r^2 \sin^2\frac{\varphi}{2} = \underline{\underline{[redacted]^2 (\cos\varphi - 1)}}$$

Lsg Aufgabe 3



Gleichgewicht:

Stange: (1) $\overset{\curvearrowright}{A}$: $-P l \cos\alpha + N_2 \frac{l}{2} = 0$

Kugel: (2) $\overset{\curvearrowright}{M}$: $H_1 = H_2$

(3) $\rightarrow$: $N_1 - N_2\cos\alpha - H_2 \sin\alpha = 0$

(4) $\uparrow$: $-G - H_1 - H_2\cos\alpha + N_2 \sin\alpha = 0$

Haftbedingungen: $H_1 \le \mu_1 N_1$ (5)

$H_2 \le \mu_2 N_2$ (6)

Auflösen: (1) $\rightsquigarrow$ $N_2 = 2P\cos\alpha$ (7)

(2)+(7) in (4): $H_1(1+\cos\alpha) = 2P\cos\alpha\sin\alpha - G$

$\rightsquigarrow$ $H_1 = H_2 = \dfrac{2P\cos\alpha\sin\alpha - G}{1+\cos\alpha}$ (8)

(7)+(8) in (3): $N_1 = 2P\cos^2\alpha + \dfrac{2P\cos\alpha\sin\alpha - G}{1+\cos\alpha}\sin\alpha$ (9)

(8)+(9) in (5): $\mu_1 \ge \dfrac{2P\cos\alpha\sin\alpha - G}{(1+\cos\alpha)\left(2P\cos^2\alpha + \frac{2P\cos\alpha\sin\alpha - G}{1+\cos\alpha}\sin\alpha\right)} =$

$$= \underline{\underline{\frac{2P\cos\alpha\sin\alpha - G}{2P\cos\alpha(1+\cos^2\alpha) - G\sin\alpha}}}$$

(7)+(8) in (4) $\underline{\underline{\mu_2 \ge \dfrac{2P\cos\alpha\sin\alpha - G}{2(1+\cos\alpha)P\cos\alpha}}}$

Lsg Aufgabe 4

a) Scheibe 1: Elastizitätsgesetz: $\varepsilon_{1x} = \dfrac{\sigma_{1x}}{E_1} - \nu_1\dfrac{\sigma_{1y}}{E_1} + \alpha_T \Delta T$ (1)

$\varepsilon_{1y} = \dfrac{\sigma_{1y}}{E_1} - \nu_1\dfrac{\sigma_{1x}}{E_1} + \alpha_T\Delta T$ (2)

aus Randbed.: $\varepsilon_{1x} \overset{!}{=} 0$ (3)

Scheibe 2: Elastizitätsgesetz: $\varepsilon_{2y} = \dfrac{\sigma_{2y}}{E_2} + \nu_2\dfrac{\sigma_0}{E_2}$ (4)

gleichgewicht: $\sigma_{1y} = \sigma_{2y} =: \sigma_y$ (5)

Verträglichkeit: $\varepsilon_{1y} b_1 + \varepsilon_{2y} b_2 = 0$ (6)

Auflösen: (3) in (1): $\sigma_{1x} = \nu_1\sigma_{1y} - E_1\alpha_T\Delta T$

in (2): $\varepsilon_{1y} = (1-\nu_1^2)\dfrac{\sigma_{1y}}{E_1} + (1+\nu_1)\alpha_T\Delta T$

mit (5),(6),(7): $\underline{\underline{\sigma_y = -E_1\dfrac{(1+\nu_1)\alpha_T\Delta T b_1 E_2 + \nu_2\sigma_0 b_2}{(1-\nu_1^2)b_1E_2 + b_2E_1}}}$ [redacted]

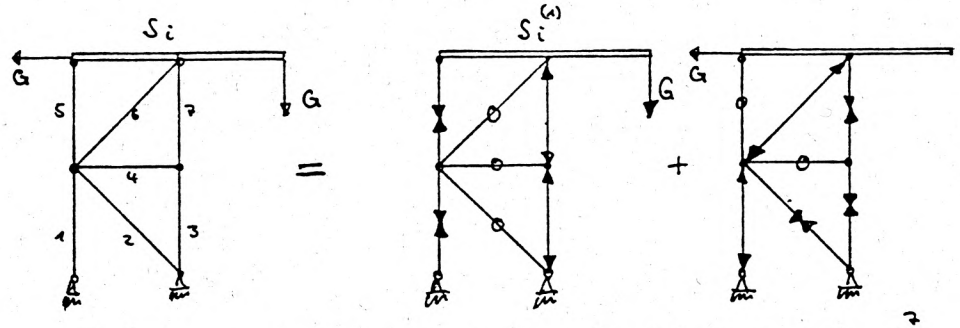
b) $\underline{\underline{\Delta b_1}} = \varepsilon_{1y}\, b_1 = b_1 (1-\nu_1^2)\dfrac{\sigma_y}{E_1} + b_1(1+\nu_1)\alpha_T \Delta T =$

$$= -\,b_1(1-\nu_1^2)\,\frac{(1+\nu_1)\alpha_T \Delta T\, b_1 E_2 + \nu}{(1-\nu_1^2)\, b_1 E_2 + b_2 E_1} \;\underline{\cdot\, b_2} + b_1(1+\nu_1)\alpha_T \Delta T$$

Lsg Aufgabe 5:

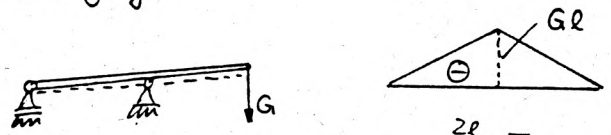
δ wird zusammengesetzt aus Fachwerkverschiebung mit starren Balken, Balkenbiegung und Seilverlängerung.

Fachwerkverschiebung:



i	1	2	3	4	5	6	7	$\sum_{i=1}^{7}$
$\frac{l_i}{EA_i}$	$\frac{l}{EA}$	$\sqrt{2}\frac{l}{EA}$	$\frac{l}{EA}$	$\frac{l}{EA}$	$\frac{l}{EA}$	$\sqrt{2}\frac{l}{EA}$	$\frac{l}{EA}$	
$S_i^{(1)}$	G	0	$-2G$	0	G	0	$-2G$	
$S_i^{(2)}$	$-2G$	$\sqrt{2}G$	G	0	0	$-\sqrt{2}G$	G	
$\frac{(S_i^{(1)}+S_i^{(2)})(\bar S_i^{(1)}+\bar S_i^{(2)})\, l_i}{EA_i}$	$\frac{Gl}{EA}$	$2\sqrt{2}\frac{Gl}{EA}$	$\frac{Gl}{EA}$	0	$\frac{Gl}{EA}$	$2\sqrt{2}\frac{Gl}{EA}$	$\frac{Gl}{EA}$	$(4+4\sqrt{2})\frac{Gl}{EA}$

Balkenbiegung:



$$f_B = \int_0^{2l} \frac{M\bar M}{EI}\, ds = \frac{2}{3}\frac{Gl^3}{EI}$$

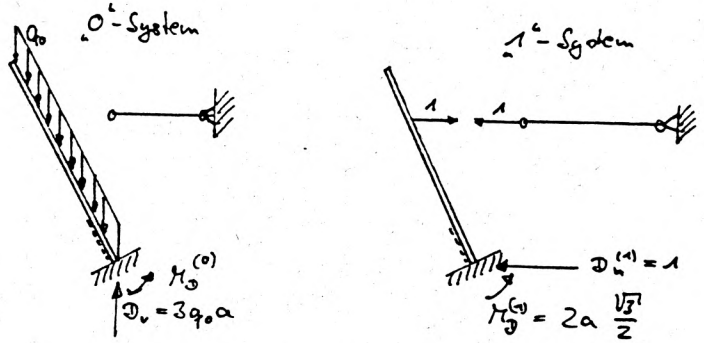
Seilverlängerung:

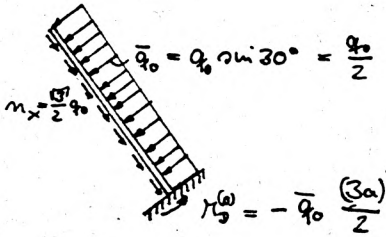
$$f_S = \frac{Sl}{EA_S} = S\,\frac{Gl}{EA_S}$$

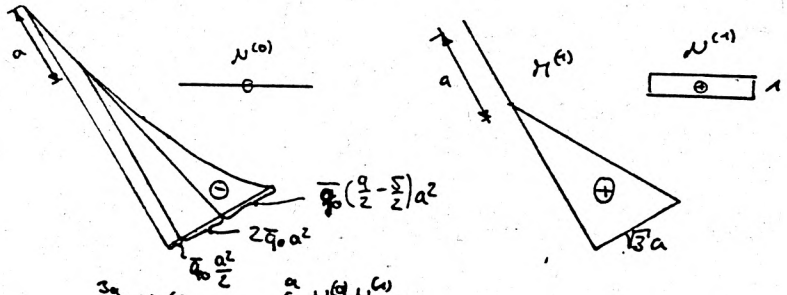
Superposition: $\underline{\underline{\delta}} = f_F + f_B + f_S = \underline{\underline{4(1+\sqrt{2})\frac{Gl}{EA} + \frac{2}{3}\frac{Gl^3}{EI} + S\frac{Gl}{EA_S}}}$

Lsg Aufgabe 6:

Das System ist 1-fach statisch unbestimmt. Wähle Stabkraft $S := X$







$$\underline{S = X} = -\frac{\int_0^{3a} \frac{M^{(0)}M^{(1)}}{EI}dx + \int_0^a \frac{N^{(0)}N^{(1)}}{EA}dx}{\int_0^{3a} \frac{M^{(1)}M^{(1)}}{EI}dx + \int_0^a \frac{N^{(1)}N^{(1)}}{EA}dx} =$$

$$= -\frac{2a\frac{\sqrt{3}}{2}2a\left(-\frac{1}{2}\bar q_0\frac{a^2}{2} - \frac{1}{3}\bar q_0 2a^2 - \frac{1}{4}\bar q_0 2a^2\right)}{\frac{1}{3}2a\,4a^2\frac{3}{4} + \frac{a\,EI}{EA}} =$$

$$= \frac{2a^4\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)}{2a^3+15a^3} = \frac{\sqrt{3}}{6}\bar q_0 a = \underline{\frac{\sqrt{3}}{12}q_0 a}\;;$$

Lagerreaktionen:

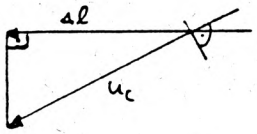
$S = \frac{\sqrt{3}}{12} q_0 a$

$\underline{\underline{D_V}} = D_V^{(0)} + X D_V^{(1)} = \underline{\underline{3 q_0 a}}$;

$\underline{\underline{D_H}} = D_H^{(0)} + X D_H^{(1)} = \underline{\underline{\frac{1}{12}\sqrt{3}\, q_0 a}}$;

$\underline{\underline{M_A}} = M_A^{(0)} + X M_A^{(1)} = -\frac{a}{4} q_0 a^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} q_0 a \sqrt{3}\, a = \underline{\underline{-2 q_0 a^2}}$;

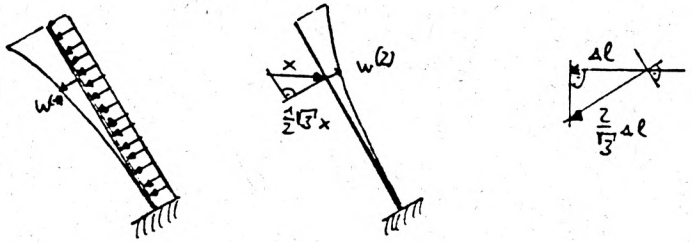
Verschiebung von C:



$\Delta l = \frac{S \cdot a}{EA} - \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{q_0 a^2}{EA} = \frac{\sqrt{3}\, S}{4} \frac{q_0 a^4}{EI}$

$\underline{\underline{u_C}} = \frac{\Delta l}{\cos 30°} = \underline{\underline{\frac{5}{2} \frac{q_0 a^4}{EI}}}$

Alternativ: Statisch unbestimmte Rechnung mit Biegelinientafel:



$\Delta l = \frac{X a}{EA}$

Biegelinientafel:

$EI\, w^{(1)} = \frac{\bar{q}(3a)^4}{24} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(6 - 4\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = \frac{17}{6} q_0 a^4$

$EI\, w^{(2)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\, x\right)(2a)^3}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} x a^3$

Verträglichkeit:

$w = w_1 - w_2 \overset{!}{=} \frac{2\Delta l}{\sqrt{3}}$

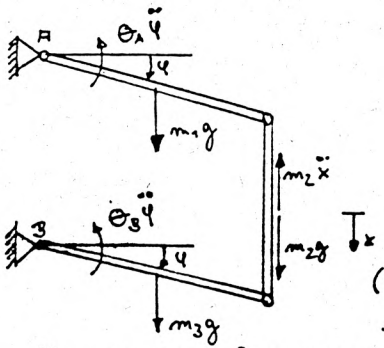
$\rightarrow \frac{1}{EI}\left(\frac{17}{6} q_0 a^4 - \frac{4\sqrt{3}}{3} X a^3\right) = \frac{2 X a}{\sqrt{3}\, EA}$

$\rightarrow 17 q_0 a^3 - 8\sqrt{3}\, X a^2 = \frac{EI}{EA} \frac{12}{\sqrt{3}} X$

$\rightarrow \underline{\underline{X = \frac{\sqrt{3}}{12} q_0 a}}$

Lsg Aufgabe 7:

a) Lösung mit d'Alembert:



$\Theta_A = m_1 \frac{l^2}{3}$; $\Theta_B = m_3 \frac{l^2}{3}$

Kinematik:

$x = l \cdot \varphi \rightarrow \delta x = l\, \delta\varphi$

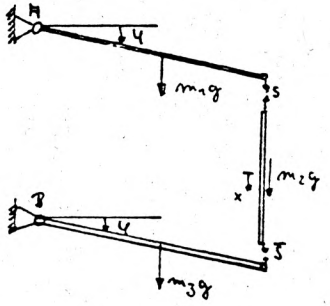
$\ddot{x} = l \cdot \ddot{\varphi}$

d'Alembert

$\left(-\Theta_A \ddot{\varphi} + m_1 g \frac{l}{2} + m_2 g l - m_2 \ddot{\varphi} l^2 - \Theta_B \ddot{\varphi} + m_3 g \frac{l}{2}\right) \delta\varphi = 0$

$\rightsquigarrow \underline{\underline{\ddot{\varphi} = \frac{3}{2} \frac{m_1 + 2m_2 + m_3}{m_1 + 3m_2 + m_3} \frac{g}{l}}}$ (1)

Lösung mit Newton:



$\Theta_A = m_1 \frac{l^2}{3}$; $\Theta_B = m_3 \frac{l^2}{3}$

Kinematik:

$x = l \cdot \varphi \rightsquigarrow \ddot{x} = l \ddot{\varphi}$

Balken ①:

$\circlearrowleft A$: $\frac{1}{3} m_1 l^2 \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} m_1 g l + S l$

Balken ②

$\downarrow$: $m_2 \ddot{x} = m_2 g + \bar{S} - S$

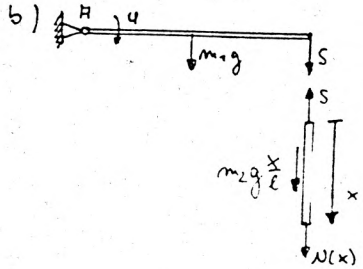
Balken ③:

$\circlearrowleft B$: $\frac{1}{3} m_3 l^2 \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} m_3 g l - \bar{S} l$

Einsetzen liefert:

$\underline{\underline{\ddot{\varphi} = \frac{3}{2} \frac{m_1 + 2m_2 + m_3}{m_1 + 3m_2 + m_3} \frac{g}{l}}}$; (1)

b)



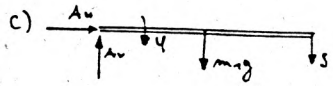
$\curvearrowright A$: $\Theta_A \ddot{u} = Sl + m_1 g \frac{l}{2}$

mit (1): $S = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + 3m_2 + m_3)} g$ (2)

$\downarrow$: $m_2 \frac{x}{l} \ddot{x} = -S + N + \frac{m_2 g}{l} x$ (3)

$$N(x) = \frac{m_2 g}{2l} \frac{(m_1 + m_2)x - m_1 l}{m_1 + 3m_2 + m_3}$$

c)



$\rightarrow$: $A_u = 0$

$\downarrow$: $m_1 \ddot{u} \frac{l}{2} = m_1 g - A_v + S$ (4)

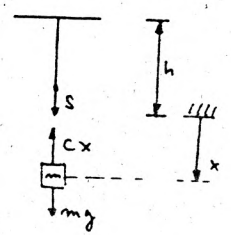
(1) + (2) in (4)

$$A_v = \frac{m_1 g}{4} \frac{m_1 + 4m_2 + m_3}{m_1 + 3m_2 + m_3}$$

Lsg Aufgabe 8:

a) Energiesatz: $\frac{1}{2} m v_B^2 = mgh \rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$

b)



Newton: $m\ddot{x} + cx = mg$

$\rightsquigarrow \ddot{x} + \omega^2 x = g$; $\omega^2 = \frac{c}{m}$

Lösung: $x = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}$

AB: $x(t=0) = 0 \rightsquigarrow B = -\frac{g}{\omega^2}$

$\dot{x}(t=0) = v_B \rightsquigarrow A = \frac{v_B}{\omega}$

Seilkraft: $S = cx = c\left(\frac{v_B}{\omega} \sin \omega t - \frac{g}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}\right)$

c) Amplitude: $C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\frac{2mgh}{c} + \left(\frac{mg}{c}\right)^2}$; $x_{st} = \frac{mg}{c}$

d) $2h = h + C + x_{st}$

$\rightsquigarrow (h - x_{st})^2 = C^2 = 2\frac{mg}{c}h + \left(\frac{mg}{c}\right)^2 = 2h x_{st} + x_{st}^2$

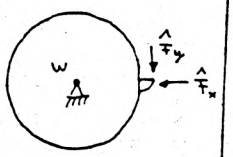
$\rightsquigarrow h^2 - 2h x_{st} + x_{st}^2 = 2h x_{st} + x_{st}^2$

$\rightsquigarrow h = 4 x_{st} = 4 \frac{mg}{c^*} \rightsquigarrow c^* = 4 \frac{mg}{h}$

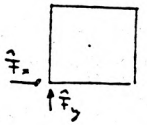
Lsg Aufgabe 9:

a) Schnittbild:

Walze:



Scheibe:



Trägheitsmomente: $\Theta_W = \frac{1}{2} M r^2$; $\Theta_S = \frac{1}{6} m b^2$

Impulssätze:

$\rightarrow$: $m(\bar{v}_{Sx} - \cancel{v_{Sx}}^{=0}) = \hat{F}_x$ (1)

$\uparrow$: $m(\bar{v}_{Sy} - \cancel{v_{Sy}}^{=v_0}) = \hat{F}_y$ (2)

Drehimpulssätze: (3) $\curvearrowright W$: $\Theta_W(\bar{\omega}_W - \cancel{\omega_W}^{=0}) = \hat{F}_y r$

$\curvearrowright S$: $\Theta_S(\bar{\omega}_S - \cancel{\omega_S}^{=0}) = \frac{b}{2}(\hat{F}_y - \hat{F}_x)$ (4)

Stoßbedingung: $e = -\frac{\bar{v}_{Wy}^P - \bar{v}_{Sy}^P}{v_{Wy}^P - v_{Sy}^P} = \frac{\bar{v}_{Wy}^P - \bar{v}_{Sy}^P}{+v_0}$ (5)

rauher Stoß: $\bar{v}_{Wx}^P = \bar{v}_{Sx}^P$

Kinematik: $\bar{v}_{Wx}^P = 0$ (7) | $\bar{v}_{Sx}^P = \bar{v}_{Sx} - \frac{b}{2}\bar{\omega}_S$ (9)

$\bar{v}_{Wy}^P = -r\bar{\omega}_W$ (8) | $\bar{v}_{Sy}^P = \bar{v}_{Sy} + \frac{b}{2}\bar{\omega}_S$ (10)

10 Gleichungen für 10 Unbekannte $\bar{v}_{Sx}$, $\bar{v}_{Sy}$, $\hat{F}_x$, $\hat{F}_y$, $\bar{\omega}_W$, $\bar{\omega}_S$, $\bar{v}_{Wy}^P$, $\bar{v}_{Wx}^P$, $\bar{v}_{Sx}^P$, $\bar{v}_{Sy}^P$

b) $\bar{\omega}_W \overset{!}{=} \bar{\omega}_S = \bar{\omega}$

(3) in (4): $\Theta_S \bar{\omega} = \frac{b}{2}\Theta_W \frac{\bar{\omega}}{r} - \frac{b}{2}\hat{F}_x$ (11)

aus (1), (6), (7), (9): $\hat{F}_x = m\frac{b}{2}\bar{\omega}$ (12)

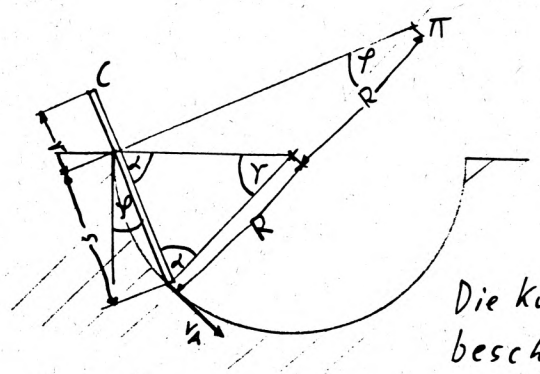
(12) in (11): $\frac{1}{6} m b^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M r b - \frac{1}{4} m b^2$

$\rightsquigarrow \frac{5}{12} m b = \frac{1}{4} M r$

$\rightsquigarrow \frac{m}{M} = \frac{3}{5}\frac{r}{b}$

Aufgabe 10:

a)



$v_A = \text{konst}$

$\alpha = 90° - \varphi$

$2\alpha = 180° - \gamma$

$\Rightarrow \gamma = 2\varphi$

$v_A = R \cdot \dot{\gamma}$

$= R \cdot 2 \cdot \dot{\varphi}$

Die Kurve des Momentanpols beschreibt ein Kreis mit Radius R

Geschwindigkeit des Momentanpols: $\underline{\underline{v_A = R \cdot 2 \cdot \dot{\varphi}}}$

b) $\underline{\underline{\dot{\varphi} = \frac{v_A}{2 \cdot R}}}$

c) $r = l - s = l - 2 \cdot R \cdot \sin\varphi$

$\dot{r} = -2 \cdot R \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi$

$\ddot{r} = 2 \cdot R\,(\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \cancel{- \cos\varphi \cdot \ddot{\varphi}})$

$\dot{\varphi} = \text{konstant} \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$

<u>Geschwindigkeit in Polarkoordinaten:</u>

$v = \dot{r} \cdot \vec{e_r} + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e_\varphi} = -2 \cdot R \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi \cdot \vec{e_r} + r \cdot \dot{\varphi}\, \vec{e_\varphi}$

$\underline{\underline{v = -v_A \cdot \cos\varphi \cdot \vec{e_r} + (l - 2 \cdot R \cdot \sin\varphi) \cdot \frac{v_A}{2 \cdot R}\, \vec{e_\varphi}}}$

<u>Beschleunigung</u>

$a = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e_r} + (r \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi}) \cdot \vec{e_\varphi}$

$= \left(2 \cdot R\,(\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \cancel{- \cos\varphi \cdot \ddot{\varphi}}^{\,0}) - (l - 2 \cdot R \cdot \sin\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2\right) \cdot \vec{e_r}$

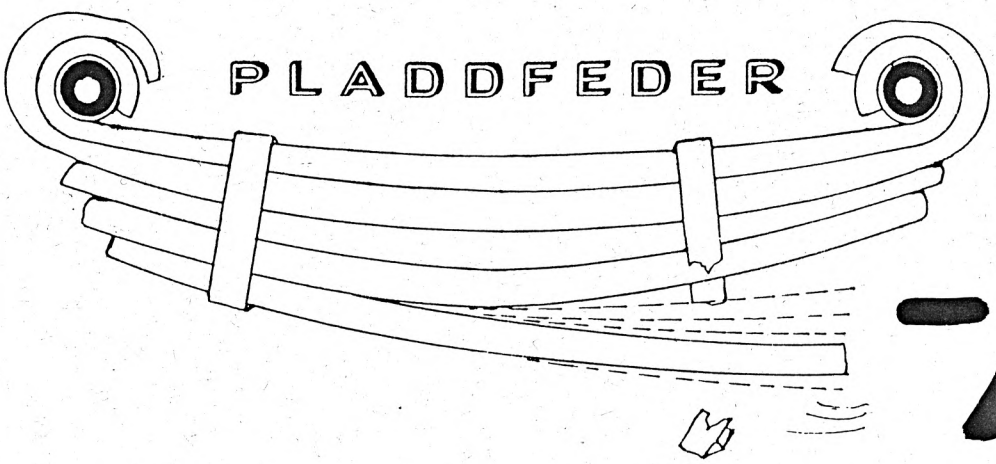
$+ \left(\cancel{(l - 2 \cdot R \cdot \sin\varphi) \cdot \ddot{\varphi}}^{\,0} + 2 \cdot (-2 \cdot R \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi})\right) \cdot \vec{e_\varphi}$

$a = (2 \cdot R \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - l \cdot \dot{\varphi}^2 + 2 \cdot R \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e_r}$

$- (4 R \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e_\varphi}$

$\underline{\underline{a = \left(\frac{v_A^2}{R} \cdot \sin\varphi - \frac{l \cdot v_A^2}{4 \cdot R^2}\right) \cdot \vec{e_r} - \left(\frac{v_A^2}{R} \cdot \cos\varphi\right) \cdot \vec{e_\varphi}}}$

Viel Erfolg!



-Leser wissen mehr!

Fachschafts-sitzung

jeden Dienstag, 19.00 Uhr

jetzt noch schöner!